MÉMOIRE

SUR

LA THÉORIE DES PUISSANCES, DES FONCTIONS ANGULAIRES ET DES FACULTÉS ANALYTIQUES.

PAR

A. L. CRELLE.

(Extrait du „*Journal für die reine und angewandte Mathematik*" *tom. VII. cah.* 3. *et* 4.)

BERLIN, 1831.

CHEZ G. REIMER.

Digitized by the Internet Archive
in 2009 with funding from
University of Ottawa

http://www.archive.org/details/mmoiresurlath00crel

Note préliminaire.

A la fin d'un petit mémoire sur la convergence de la série du binôme, inséré dans le second cahier du cinquième tome du journal des mathématiques que je publie, où j'ai appliqué la méthode de d'Alembert à la série du binôme pour en juger la convergence, j'ai promis (pag. 196.) de traiter cet objet encore d'une autre manière directe, en opérant immédiatement sur l'expression générale et identique du reste de la série, par une certaine méthode générale d'évaluer les restes des séries, développées suivant les différences au lieu des différentielles; méthode qui s'applique au théorème général de Taylor d'une manière semblable à celle qu'a donnée Mr. Lagrange pour l'évaluation des restes de la série particulière de Taylor et qui a été perfectionnée par Mr. Ampère.

Je veux m'acquitter ici de cette promesse. Mais comme il étoit nécessaire de présenter d'abord les développemens et théorèmes généraux mêmes dont on voulait faire une application particulière, comme, aussi, la théorie des puissances elle même étoit presque inséparable de l'objet qu'on alloit traiter, et que d'un autre côté il se présentait ainsi une bonne occasion et un moyen facile de faire encore d'autres applications des principes fondamentaux, une fois qu'ils seraient établis, ce mémoire, destiné originairement à un objet très spécial, a reçu une beaucoup plus grande étendue, et embrasse maintenant, comme applications des principes généraux qu'il présente, presque toute la théorie des puissances, des logarithmes, des quantités exponentielles et fonctions angulaires, suivie des points principaux de la théorie des factorielles et facultés analytiques; tout cela suivant les vues qui semblent être propres à ces objets.

Quant à la théorie des puissances, des logarithmes et fonctions angulaires, on pourra être étonné, de me voir reprendre des objets traités tant de fois; mais on trouvera dans le mémoire même les raisons qui m'y

ont engagé. On remarquera qu'effectivement la théorie ordinaire est encore très imparfaite tant pour la rigueur des démonstrations que pour la conséquence, et qu'elle n'est pas exempte de lacunes, imperfections qui proviennent, à ce qu'il semble, de la séparation et du morcellement d'objets qui ont une seule et même source, de l'omission de points essentiels, par exemple, de la recherche de la convergence des séries auxquelles on parvient, et de l'usage de procéder des cas particuliers aux cas généraux, au lieu de suivre la voie inverse. D'après ces motifs il ne semble pas inutile de reprendre ces objets, d'autant moins, qu'ils entrent dans les élémens, qui surtout doivent être bien établis et n'offrir jamais de lacunes ni de démonstrations foibles.

Il est vrai que si dans le mémoire présent on excepte quelques théorèmes et éclaircissemens généraux, et quelques théorèmes de la théorie des facultés analytiques, les résultats nouveaux qu'il contient ne sont qu'en très petit nombre; mais on y trouvera plusieurs vues nouvelles, ainsi que la pratique d'une méthode, qui seule me semble être propre à l'analyse et pour ainsi dire lui appartenir comme innée. Ce ne sont donc pas les résultats, mais c'est surtout la méthode, à laquelle je prie le lecteur de vouloir bien accorder son attention. On en verra les effets, et l'on trouvera que par son secours les difficultés que laisse la méthode ordinaire, peuvent effectivement être vaincues et les lacunes remplies.

Depuis un nombre d'années je prépare un traité d'analyse qui doit embrasser cette science dans toute son étendue et dans son état actuel. Un tel ouvrage me semble devoir devenir très utile à la science, et je le crois même d'une nécessité urgente; car la science analytique s'est, surtout dans ce dernier tems, tellement étendue et ramifiée, qu'il n'est presque plus possible à celui qui l'étudie d'en embrasser toutes les parties comme formant un ensemble. Le problème que je me suis proposé présente sans doute de très grandes difficultés. La seule collection des objects nombreux qu'il embrasse en forme la moindre partie. Il s'agit surtout du système, et pour cela il ne suffit pas de ranger les objets dans un ordre tel que les théorèmes et propositions ne se rapportent jamais qu'aux théorèmes et propositions qui précèdent: il s'agit de suivre la liaison intime et naturelle des propositions jusqu'à leur origine, de rapprocher les objets qui ont la même source, et de faire voir, par la doctrine elle même, son organisme et son développement naturel. Il s'agit de cette méthode non-

arbitraire, qui convient à l'objet, et cette méthode est le point le plus difficile dans une science, et en même tems le plus essentiel. Les combinaisons de vérités connues, même pour en découvrir de nouvelles, ne forment pour ainsi dire que la pratique de la science; la méthode en est l'esprit. La seule force d'invention a plus ou moins besoin du secours du hasard, pour arriver à de nouvelles idées heureuses, qui puissent agrandir le domaine de l'analyse. La véritable méthode, savoir celle qui se tire de l'essence et de l'organisme de la science elle même, est le moyen direct et sûr d'en franchir les bornes. Je sens donc fort bien l'immense difficulté de ma tâche, et je n'oublie pas que je puis être accusé de témérité, d'oser entreprendre un tel ouvrage. Mais je serai content, si mon essai contribuera au moins à encourager d'autres personnes, à suppléer ce que j'aurai peut être manqué ou négligé.

J'ai parlé de mon entreprise parceque le mémoire présent peut être aussi regardé comme un échantillon du traité que j'ai en vue. C'est pourquoi je le présente sous la forme d'un cours élémentaire, plutôt que sous celle d'un mémoire destiné aux personnes consommées dans la science: Il fera surtout voir par un exemple la méthode que je me propose de suivre.

J'entre en matière.

I. Définition et proprietés des puissances.

1.

On ne peut pas dire généralement qu'une puissance p. e. u^y est un produit de y facteurs égaux à u. Cette définition cesse déjà d'être bonne si y est une fraction, parcequ'on ne peut pas multiplier le nombre u p. e. $\frac{2}{3}$ ou $\frac{8}{5}$ fois par lui même. Il est vrai que, dans ce cas, on peut dire que les puissances sont les racines du nombre u p. e. que $u^{\frac{1}{3}}$ est le nombre qui, multiplié trois fois par lui même, donne u. Mais cette dernière définition n'est pas exacte si l'exposant y est un nombre irrationnel, puisqu'il n'existe pas de fraction qui puisse exprimer la valeur irrationnelle de l'exposant. Ici on pourroit encore recourir à l'approximation, mais elle n'offriroit pas d'idée claire et précise de l'objet; et

si enfin l'exposant est une quantité imaginaire, l'approximation ne réussit pas non plus.

Donc en allant des cas particuliers aux cas généraux, on ne parvient pas à quelque définition générale et précise des puissances bonne pour les élémens.

2.

Il est plus naturel, et même il n'y a ici, pas plus que dans plusieurs cas de l'analyse, d'autre moyen que de supposer hypothétiquement les propriétés fondamentales d'une fonction encore inconnue, pour en tirer ses autres propriétés, son développement en séries et son rapport avec d'autres quantités. Si en premier lieu on trouve que les résultats tirés des propriétés supposées ne sont pas en contradiction entre eux, on sera sûr que la fonction supposée existe réellement; et si, en second lieu, les résultats coïncident dans les cas particuliers avec les expressions des puissances dans les mêmes cas, rien n'empêche de donner le nom de puissance à la fonction supposée. Le doute que la fonction supposée soit véritablement et précisement ce qu'on a coutume d'appeler puissance, n'est qu'apparent, car, en partant des cas particuliers pour procéder à la découverte des propriétés générales des puissances, on ne trouve pas ces proprietés, on ne fait également que les supposer pas à pas. On fait au fond la même chose que nous faisons ici, mais avec un détour inutile et par une voie incertaine et exposée aux erreurs. La marche vraiment analytique, qui mène des expressions générales aux résultats particuliers, est la voie naturelle et sûre; tandis que la voie inverse n'est qu'une sorte d'induction, dont les résultats doivent être nécessairement plus ou moins incertains.

Supposons donc une fonction encore inconnue $f(u, y)$ des deux quantités u et y, qui ait les propriétés: que si y varie d'une quantité arbitraire k, les deux équations

$$1. \quad f(u,y) \cdot f(u,k) = f(u, y+k) \text{ et}$$
$$2. \quad f(f(u,y),k) = f(u,yk)$$

ont lieu généralement et pour toutes les valeurs de u, y et k.

Au lieu de la notation peu commode de la dépendance de la quantité inconnue des élémens u et y au moyen de la lettre f nous pourrons

l'exprimer aussi par la seule position des élémens et nous écrirons

$$3. \quad u^{\gamma}.u^{k} = u^{\gamma+k} \text{ et}$$

$$4. \quad (u^{\gamma})^{k} = u^{\gamma k}.$$

Ces deux équations exprimeront les propriétés fondamentales de la fonction inconnue que nous supposons hypothétiquement et que nous appellerons arbitrairement puissance. L'élément u s'appellera racine, l'autre élément γ exposant, et nommément si l'on écrit

$$5. \quad u^{\gamma} = z,$$

nous dirons que

u est la racine de la puissance z à exposant γ,
γ l'exposant de la puissance z de la racine u et
z la puissance de la racine u pour l'exposant γ.

On donne encore d'autres noms aux quantités u, γ, z, savoir base, logarithme et logarithmande: nous en parlerons plus bas.

Nous ferons souvenir encore une fois que u^{γ} n'exprime nullement un produit de facteurs égaux exclusivement, ni quelque autre valeur d'une puissance dans un cas particulier, mais plutôt cette fonction inconnue soumise aux deux conditions exprimées par les équations (3. et 4.).

Il s'agit maintenant de tirer des propriétés générales (3. et 4.) les autres propriétés des puissances, pour en trouver les valeurs dans les cas particuliers. Mais il faut que cela se fasse sans recourir à autre chose qu'à ce que les équations (3. et 4.) expriment, et aux principes du calcul qui entrent dans les expressions mêmes.

3.

Quant à ces principes, ce sont ceux de la théorie du positif et négatif et des quatre premières opérations: addition, multiplication et les inverses soustraction et division. Car le cas de la multiplication de deux puissances (éq. 3.) est celui de l'addition des exposans, et si k est négatif, on tombe dans la soustraction; le cas de l'élévation d'une puissance à une autre est le cas de la multiplication des exposans, et si le nouvel exposant est une fraction, la division s'emploie. Il faut donc que la théorie du positif et négatif, et celle des quatre premières opérations, précèdent celle des puissances. Nous les supposons établies, en nous reservant pour une autre occasion l'essai des éclaircissemens qui peut-être seront nécessaires. Nous nous bornerons seulement à annoncer

ici que la théorie des quatre premières opérations peut être donnée d'une manière semblable à celle dont on va se servir pour la théorie des puissances.

4.

I. Faisons $y = 1$ et $k = 1$ dans la seconde équation fondamentale (4.) elle donnera $(u^1)^1 = u^{1.1}$. Mais, suivant la théorie de la multiplication, le produit 1.1 est 1; donc on a $(u^1)^1 = u^1$. Soit pour un moment $u^1 = w$, l'équation qu'on vient de trouver donne $w^1 = w$; donc en écrivant u au lieu de w, on a

6. $$u^1 = u.$$

Voilà le premier théorème tiré des équations fondamentales.

II. Soit dans la première équation fondamentale (3.) $k = 0$ et $y = 1$, elle donnera $u^1 . u^0 = u^1$ ou bien, u étant $= u^1$ (6.), $u . u^0 = u$. De là on tire $u^0 = \frac{u}{u}$. Mais en vertu de la théorie de la multiplication, si le diviseur égale le dividende, le quotient est l'unité, donc

7. $$u^0 = 1.$$

C'est le second théorème tiré des équations fondamentales.

III. Supposons dans la première équation fondamentale (3.) $k = -y$, elle donne $u^y . u^{-y} = u^{y-y} = u^0$ et puisque $u^0 = 1$ (7.), $u^y . u^{-y} = 1$ et par suite

8. $$u^{-y} = \frac{1}{u^y}.$$

C'est un troisième théorème tiré des équations fondamentales. Puisqu'en vertu de la théorie de la multiplication $u^y . \frac{1}{u^k} = \frac{u^y}{u^k}$ et en vertu de l'équation (8.) $\frac{1}{u^k} = u^{-k}$ on peut y ajouter comme corollaire

9. $$u^y . u^{-k} = \frac{u^y}{u^k}.$$

IV. Faisons $u^y = z$ dans la seconde équation fondamentale, elle donne $z^k = u^{yk}$ et si l'on fait $k = \frac{1}{y}$, $z^{\frac{1}{y}} = u^1$; donc puisque $u^1 = u$ (6.) on a

10. $$z^{\frac{1}{y}} = u, \quad u^y \text{ étant } = z.$$

C'est la quatrième conséquence qu'offrent les équations fondamentales. Elle apprend que la racine d'une puissance à exposant quelconque peut être regardée comme une puissance de la puissance même, ayant pour exposant le quotient 1 divisé par l'exposant primitif.

Puisqu'en vertu de la seconde équation fondamentale (4.) par ex. $(w^k)^{\frac{1}{y}} = w^{k.\frac{1}{y}}$, et si dans l'équation (10.) on fait $z = w^k$, on a pour corollaire:

$$11. \quad u = w^{\frac{k}{y}}, \quad \text{si} \quad u^y = w^k.$$

V. Si dans la seconde équation fondamentale (4.) on fait $u^y = z$, elle donne $z^k = u^{yk}$. Mais en vertu de la première équation fondamentale (3.) on a $u^k . u^{yk} = u^{k+yk} = u^{k(1+y)}$, donc, u^{yk} étant $= z^k$, $u^k . z^k = u^{k(1+y)}$. Mais $u . z = u . u^y$, ou bien, u étant $= u^1$ (7.), $u . z = u^1 . u^y$. Cela donne, en vertu de la première équation fondamentale (3.) $u . z = u^{(1+y)}$, d'où $(uz)^k = (u^{1+y})^k$. De là on tire $(uz)^k = u^{k(1+y)}$, $(u^{1+y})^k$ étant égal à $u^{k(1+y)}$. Mais nous avons trouvé plus haut $u^{k(1+y)} = u^k . z^k$. Donc on a

$$12. \quad (uz)^k = u^k . z^k.$$

Faisant $u = u_1$ et $z = u_2 u_3$, l'équation (12.) donne $(u_1 u_2 u_3)^k = u^k . (u_2 u_3)^k$ et puisque en vertu de la même équation $(u_2 u_3)^k = u_2^k u_3^k$, on a $(u_1 u_2 u_3)^k = u_1^k u_2^k u_3^k$. En continuant, on trouve de la même manière $(u_1 u_2 u_3 u_4)^k = u_1^k u_2^k u_3^k u_4^k$ et généralement

$$13. \quad (u_1 u_2 u_3 \ldots . u_n)^k = u_1^k u_2^k u_3^k \ldots . u_n^k .$$

Voilà un cinquième théorème tiré des équations fondamentales. Il fait voir que la puissance d'un produit des fonctions est égal au produit des puissances des facteurs prises avec le même exposant.

Si dans l'équation (12.) on écrit z^n au lieu de z, elle donne $(uz^n)^k = u^k (z^n)^k$, ou bien, parcequ'en vertu de la seconde équation fondamentale (4.) $(z^n)^k = z^{nk}$, $(uz^n)^k = u^k z^{nk}$. Si dans cette équation on fait $n = -1$ on a $(uz^{-1})^k = u^k z^{-k}$. Mais en vertu de l'équation (8.) $z^{-1} = \frac{1}{z}$ et $z^{-k} = \frac{1}{z^k}$, donc on a comme corollaire

$$14. \quad \left(\frac{u}{z}\right)^k = \frac{u^k}{z^k}.$$

Si u et z représentent des produits de facteurs quelconques, de sorte que $u = u_1 u_2 u_3 \ldots . u_m$ et $z = z_1 z_2 z_3 \ldots . z_n$, l'équation (14.) donne $\left(\frac{u_1 u_2 u_3 \ldots . u_m}{z_1 z_2 z_3 \ldots . z_n}\right)^k = \frac{(u_1 u_2 u_3 \ldots . u_m)^k}{(z_1 z_2 z_3 \ldots . z_n)^k}$, donc en vertu de (13.)

$$15. \quad \left(\frac{u_1 u_2 u_3 \ldots . u_m}{z_1 z_2 z_3 \ldots . z_n}\right)^k = \frac{u_1^k u_2^k u_3^k \ldots . u_m^k}{z_1^k z_2^k z_3^k \ldots . z_n^k}.$$

VI. Si dans la première équation fondamentale (3.) les exposans y et k sont tous les deux égaux à l'unité, l'équation donne $u^1 . u^1 = u^{1+1} = u^2$, ou bien, u^1 étant $= u$ (7.) $u^2 = u . u$. Si dans l'équation (3.) on fait $y = 2$, $k = 1$, elle donne $u^2 u^1 = u^3$, ou bien, u^2 étant $= u . u$ et $u^1 = u$, $u^3 = u . u . u$ etc. Généralement, n étant un nombre entier, on aura

$$16. \quad u^n = u . u . u \ldots . \ (n \text{ facteurs}).$$

Ce sixième théorème, tiré des équations fondamentales, fait voir qu'une puissance à exposant entier n'est autre chose que le produit d'autant de facteurs égaux à la racine de la puissance qu'il y a d'unités dans l'exposant. Mais il n'y a que le seul cas d'exposant entier dans lequel une puissance puisse être représentée par un produit des facteurs. Si l'exposant n'est pas un nombre entier, la décomposition de la puissance en facteurs, comme il est aisé de voir, n'a pas lieu. C'est donc aussi le seul cas d'exposant entier où la définition que les puissances soient des produits de facteurs, ne soit pas en defaut.

5.

Soit dans l'équation (12.) $z = 1$, elle donne $(u . 1)^k = u^k . 1^k$, ou bien, $u . 1$ étant u,

$$17. \quad u^k = u^k . 1^k.$$

Divisant cette équation par u^k, on aura

$$18. \quad \frac{u^k}{u^k} = 1^k.$$

Mais la valeur de 1^k n'est pas bornée à être toujours l'unité; car si par ex. $k = \frac{1}{2}$, de sorte qu'en vertu de la première équation fondamentale $1^k . 1^k = 1^{\frac{1}{2}} . 1^{\frac{1}{2}} = 1^1 = 1$, la quantité 1^k a les deux valeurs différentes $+1$ et -1, puisque les produits $+1 . +1$ et $-1 . -1$ sont également $= 1$ tous les deux. Si $k = \frac{1}{3}$, de sorte que $1^k . 1^k . 1^k = 1^{\frac{1}{3}} . 1^{\frac{1}{3}} . 1^{\frac{1}{3}} = 1^1 = 1$, la quantité 1^k a trois valeurs différentes, savoir $+1$, $\frac{-1+(-3)^{\frac{1}{2}}}{2}$ et $\frac{-1-(-3)^{\frac{1}{2}}}{2}$, comme on le peut faire voir à l'aide de l'addition et de la multiplication seulement. Ces trois valeurs multipliées chacune deux fois par elle même donnent également l'unité pour produit; et ainsi de suite.

Il suit de cette remarque, que la quantité u^k peut avoir également plus d'une valeur; car si cela n'étoit pas, la valeur de 1^k, en vertu de l'équation (18.) ne pourrait être que l'unité dans tous les cas; résultat contraire à ce que nous venons de trouver.

Nous ne disons pas que 1^k et u^k auront toujours et nécessairement plus d'une valeur; nous faisons voir seulement qu'ils peuvent en avoir plus d'une, et cela suffit pour notre but.

Cela posé, soient v_1, v_2, v_3, ... les différentes valeurs que la quantité u^k peut avoir, le quotient $\frac{u^k}{u^k}$ représentera les quotiens suivants:

19. $\frac{v_1}{v_1}, \frac{v_2}{v_1}, \frac{v_3}{v_1}, \ldots.; \frac{v_1}{v_2}, \frac{v_2}{v_2}, \frac{v_3}{v_2}, \ldots.; \frac{v_1}{v_3}, \frac{v_2}{v_3}, \frac{v_3}{v_3}, \ldots.;$ etc.

Nous dirons maintenant en premier lieu, que le nombre des valeurs de 1^k ne peut être moindre que celui des valeurs de u^k, car, supposé que u^k ait les n valeurs différentes v_1, v_2, v_3, ... v_n, les n quotiens $\frac{v_1}{v_1}, \frac{v_2}{v_1}, \frac{v_3}{v_1}, \ldots. \frac{v_n}{v_1}$ parmi ceux (19.) qui tous, en vertu de l'équation (18.) égalent 1^k, donnent déjà n valeurs différentes pour cette dernière quantité.

Nous dirons en second lieu, que le nombre des valeurs de 1^k ne peut être plus grand que celui des valeurs de u^k; car supposons, comme ci-dessus, pour u^k les n valeurs différentes v_1, v_2, v_3, ... v_n et pour 1^k les m valeurs 1_1, 1_2, 1_3, ... 1_m, m s'il est possible étant plus grand que n, les m produits $v_1.1_1$, $v_1.1_2$, $v_1.1_3$, ... $v_1.1_m$ parmi tous ceux qui en vertu de l'équation (17.) égalent u^k, présenteroient déjà plus de valeurs que cette quantité ne doit en avoir suivant l'hypothèse.

Donc 1^k ne peut avoir ni moins ni plus de valeurs que u^k; donc le nombre des valeurs de 1^k est égal à celui des valeurs de u^k.

Mais la même chose ayant lieu pour une valeur quelconque de la base, le nombre des valeurs de u^k étant toujours égal à celui des valeurs de 1^k c'est à dire à un même nombre pour une valeur quelconque de u, il suit de là que le nombre des valeurs différentes qu'une puissance peut avoir, ne peut dépendre de la valeur de la base. Mais, excepté la base, il n'existe pas d'autre quantité dans une puissance que l'exposant; il faut donc que le nombre des valeurs différentes qu'une puissance peut avoir, dépende nécessairement de l'exposant seul. Et en vertu de ce que nous avons démontré ci-dessus, ce nombre sera égal à celui des valeurs de 1^k.

Au reste, l'équation (17.) fait voir que les différentes valeurs que la puissance u^k peut avoir, pourront être exprimées toutes par $u^k.1^k$. Dans cette expression le facteur u^k représente également toute valeur que cette quantité peut avoir. Si donc l'on adopte la notation $|u|^k$ pour exprimer

une valeur **déterminée** quelconque parmi celles qui conviennent à la quantité u^k, on peut écrire

$$20. \quad |u|^k = u^k 1^k$$

où $|u|^k$ représente indifféremment l'une ou l'autre valeur de u^k.

6.

La seconde équation fondamentale (4.) donne pour $u=1$, $y=n$,

$$21. \quad (1^n)^k = 1^{nk} = (1^k)^n.$$

Si n est un nombre **entier positif**, la puissance 1^n, en vertu de (§. 4. VI.), est un produit de n facteurs égaux entre eux et à l'unité. La valeur de ce produit est toujours 1, suivant la théorie de la multiplication, quel que soit n. C'est à dire 1^n est toujours 1, n étant un nombre entier positif. Si n est un nombre **entier negatif**, la valeur de 1^n est encore 1 pour une valeur quelconque de n, puisque en vertu de l'équation (8.) $1^{-n} = \frac{1}{1^n}$. Si $n=0$, 1^n ne cesse d'être 1, car en vertu de l'équation (7.) on a $1^0 = 1$. Donc si n est un nombre entier positif ou négatif, ou bien zéro, 1^n est toujours 1 pour un valeur quelconque de n.

En substituant cette valeur de 1^n dans l'équation (21.) on a

$$22. \quad 1^k = (1^k)^n.$$

Supposons maintenant le cas où 1^k a plus d'une valeur, on voit que toutes les valeurs des puissances $(1^k)^0$, $(1^k)^1$, $(1^k)^2$, ... $(1^k)^{-1}$, $(1^k)^{-2}$, ... ne seront pas nécessairement égales mais au contraire elles seront différentes entre elles, car il n'y a que l'unité qui, multipliée un nombre quelconque de fois par lui même, donne toujours la même quantité. Mais n étant arbitraire dans l'équation (22.), sous la seule condition d'être un nombre entier, l'expression $(1^k)^n$ représentera toutes les quantités $(1^k)^0 = 1$, 1^k, $1^k.1^k$, $1^k.1^k.1^k$, ... $\frac{1}{1^k}$, $\frac{1}{1^k.1^k}$, $\frac{1}{1^k.1^k.1^k}$ .... en même tems. Elle aura donc nécessairement plusieurs valeurs **différentes**. Mais ces valeurs seront précisément celles que 1^k peut avoir, puisque cette quantité, en vertu de l'équation (22.), s'exprime par $(1^k)^n$.

On voit par là que les différentes valeurs que 1^k peut avoir, ont la propriété qu'on les trouve, quand on multiplie, ou divise continuellement par elle même, une d'entre elles quelconque qui ne soit pas l'unité elle même, comme l'est par exemple celle $(1^k)^0$.

Si donc α_k une des différentes valeurs quelconque de 1^k qui ne soit pas 1, ces différentes valeurs seront

$$23. \quad \alpha_k^0,\ \alpha_k^1,\ \alpha_k^2,\ \alpha_k^3,\ \ldots\ \alpha_k^n;\ \alpha_k^{-1},\ \alpha_k^{-2},\ \ldots\ \alpha_k^{-n}.$$

Parmi ces valeurs il se trouve nécessairement celle $\alpha_k^0 = 1$, puisque n peut être également zéro, quel que soit n. Les autres seront différentes entre elles et de 1.

7.

Mais toutes les valeurs de 1^k ne sont différentes entre elles, que dans le cas où nk ne peut être un nombre entier positif ou négatif, quel que soit n. Car si kn étoit entier on auroit $(1^k)^n$, c'est à dire $1^{kn} = 1$. Si k est une fraction dont le dénominateur est m par ex. $k = \frac{m}{\lambda}$ où m et λ signifient des nombres entiers, la puissance $1^{\frac{m}{\lambda}}$ n'aura que λ valeurs différentes, savoir les valeurs

$$24. \quad 1,\ (\alpha_k)^1,\ (\alpha_k)^2,\ (\alpha_k)^3,\ \ldots\ (\alpha_k)^{\lambda-1}.$$

Car la valeur $(\alpha_k)^\lambda$, qui suit la dernière $(\alpha_k)^{\lambda-1}$ n'est autre chose que $(1^k)^\lambda = \left(1^{\frac{m}{\lambda}}\right)^\lambda = 1^m = 1$, c'est à dire la première des valeurs (24.). Donc les valeurs $(\alpha_k)^{\lambda+1} = (\alpha_k)^\lambda (\alpha_k)^1$, $(\alpha_k)^{\lambda+2} = (\alpha_k)^\lambda (\alpha_k)^2$, ... qui suivent celle-ci égalent de nouveau les valeurs $(\alpha_k)^1$, $(\alpha_k)^2$ etc. et la même série des valeurs (24.) recommence toujours. Les valeurs $(\alpha_k)^{-1}$, $(\alpha_k)^{-2}$ .... de $(\alpha_k)^{\frac{m}{\lambda}}$ se trouveront également parmi celles de la série (24.), car soient μ et ν des nombres entiers arbitraires et $\nu < \mu\lambda$, on a $(\alpha_k)^{\mu\lambda} = ((\alpha_k)^\lambda)^\mu = 1^\mu = 1$ donc $(\alpha_k)^{-\nu}$, ou bien $\frac{1}{(\alpha_k)^\nu}$ (8.) $= \frac{(\alpha_k)^{\mu\lambda}}{(\alpha_k)^\nu} = (\alpha_k)^{\mu\lambda-\nu}$. Ici l'exposant $\mu\lambda - \nu$ est, un nombre entier **positif** puisqu'on a supposé $\nu < \mu\lambda$; donc $(\alpha_k)^{\mu\lambda-\nu}$, c'est à dire $(\alpha_k)^{-\nu}$, est une des quantités de la série (24.). Donc la puissance 1^k n'a que λ valeurs différentes entre elles dans le cas dont il s'agit.

Si, pour abréger, on écrit α au lieu de α_k ou de $\alpha_{\frac{\mu}{\lambda}}$, on a $\alpha^\lambda = 1$ ou bien $\alpha^\lambda - 1 = 0$. Puisqu'ici λ est un nombre entier, la quantité $\alpha^\lambda - 1$ est divisible par $\alpha - 1$ et l'on trouve

$$25. \quad \frac{\alpha^\lambda - 1}{\alpha - 1} = \alpha^{\lambda-1} + \alpha^{\lambda-2} + \alpha^{\lambda-3} \ldots + 1.$$

Mais α est différent de zéro, de sorte que $\alpha - 1$ n'est pas zéro, donc

$\alpha^\lambda - 1$ étant zero, $\frac{\alpha^\lambda - 1}{\alpha - 1}$ l'est également. Donc l'équation (25.) donne

$$26. \quad 1 + \alpha + \alpha^2 + \alpha^3 \ldots + \alpha^{\lambda-1} = 0.$$

Cela fait voir que la somme de toutes les valeurs différentes d'une puissance de l'unité à exposant fractionnaire est zéro.

Si λ est un nombre premier, la quantité $\alpha^\lambda - 1$ n'est divisible que par α lui même, moins l'unité; mais si λ est un produit des nombres premiers $pqr \ldots$, $\alpha^\lambda - 1$ est également divisible par $\alpha - 1$, $\alpha^p - 1$, $\alpha^q - 1 \ldots$ $\alpha^{pq} - 1$ etc. Car si par ex. $\lambda = pqr$ et $\alpha^p = \beta$, on a $\alpha^\lambda - 1 = \alpha^{pqr} - 1 = \beta^{qr} - 1$ et $\alpha^p - 1 = \beta - 1$; donc $\frac{\alpha^{pqr} - 1}{\alpha^p - 1} = \frac{\beta^{qr} - 1}{\beta - 1}$, et $\beta^{pr} - 1$ est divisible par $\beta - 1$. On trouve $\frac{\beta^{qr} - 1}{\beta - 1} = 1 + \beta + \beta^2 \ldots + \beta^{qr-1}$, ou, ce qui est la même chose,

$$\frac{\alpha^\lambda - 1}{\alpha^p - 1} = 1 + \alpha^p + \alpha^{2p} + \ldots + \alpha^{\frac{\lambda}{p} - 1}.$$

Mais α^λ est toujours $= 1$ et α^p ne l'est pas, donc $\alpha^\lambda - 1$ et $\frac{\alpha^\lambda - 1}{\alpha^p - 1}$ sont zéro. Donc on a

$$27. \quad 1 + \alpha^p + \alpha^{2p} \ldots + \alpha^{\frac{p}{\lambda} - 1} = 0.$$

Cela fait voir que si l'exposant k de la quantité 1^k est une fraction $\frac{m}{\lambda}$ des nombres entiers m et λ, non seulement la somme de toutes les valeurs $1, \alpha, \alpha^2, \alpha^3 \ldots \alpha^\lambda$ de 1^k sera zéro, mais que les sommes des groupes de valeurs dont les exposans sont des multiples quelconques des facteurs du nombre λ, s'il y en a, le seront également. Si par ex. $\lambda = 6$ on a non seulement

$$1 + \alpha + \alpha^2 + \alpha^3 + \alpha^4 + \alpha^5 = 0$$

mais aussi

$$1 + \alpha^2 + \alpha^4 = 0 \text{ et}$$
$$1 + \alpha^3 = 0.$$

Nous ne continuerons pas plus loin la recherche des propriétés des puissances de l'unité dans le cas d'exposans fractionnaires.

8.

Si k est un nombre irrationnel ou imaginaire, nk ne peut jamais être un nombre entier pour aucune valeur du nombre entier n. Donc 1^k aura dans ce cas un nombre infini de valeurs différentes entre elles.

Les puissances de 1^k à exposans entiers négatifs ne seront pas nécessairement égales dans ce cas aux puissances à exposans entiers positifs.

Si k est un nombre entier, la quantité 1^k, et aussi, en vertu des équations (17. et 18.), la quantité u^k n'auront qu'une seule valeur.

9.

La propriété des puissances de l'unité trouvée (§. 6.) éclaircit une contradiction apparente de l'expression (13.) savoir

$$28. \quad (u_1 u_2 u_3 \ldots.)^k = u_1^k u_2^k u_3^k \ldots.$$

et de celle (17.)

$$29. \quad u^k = u^k . 1^k$$

qu'on en tire. La contradiction apparente consiste en ce que par ex. l'équation (28.) semble exprimer un beaucoup plus grand nombre de valeurs à droite qu'à gauche. Car si par ex. la quantité $(u_1 u_2 u_3 \ldots.)^k$ a λ valeurs différentes, chacun des facteurs u_1^k, u_2^k, u_3^k .... à droite en aura autant, et si le nombre des facteurs est m, il paraît qu'il y aura λ^m valeurs à droite et seulement λ à gauche, puisqu'en multipliant les facteurs à droite, leurs valeurs se combinent. Egalement l'équation (29.) semble exprimer λ^2 valeurs à droite et seulement λ à gauche.

Considérons en premier lieu l'équation (29.) sous la forme (20.) savoir

$$30. \quad u^k = |u|^k . 1^k$$

où $|u|^k$ signifie une valeur quelconque déterminée de u^k. Soit v_1 une de ces valeurs, l'équation (30.), appliquée à cette valeur, donne les λ valeurs suivantes de u^k:

$$31. \quad u^k = v_1 . 1, \; v_1 \alpha, \; v_1 \alpha^2, \; v_1 \alpha^3, \; \ldots. \; v^1 \alpha^{\lambda-1}.$$

Mais il n'existe que les λ valeurs v_1, v_2, v_3, ... v_n de la quantité u^k; donc une valeur quelconque de cette quantité, autre que celle v_1 par ex. v_2 ne peut être que parmi les valeurs (31.). Soit $v_1 \alpha^m = v_2$, l'équation (30.) appliquée à cette autre valeur de u^k donnera

$$32. \quad u^k = (v_1 \alpha^m) 1, \; (v_1 \alpha^m) \alpha, \; (v_1 \alpha^m) \alpha^2, \; (v_1 \alpha^m) \alpha^3 \ldots. \; (v_1 \alpha^m) \alpha^{\lambda-1}.$$

Mais les produits $\alpha^m . 1$, $\alpha^m . \alpha$, $\alpha^m . \alpha^2$, ... $\alpha^m . \alpha^{\lambda-1}$, comme il est aisé de voir, ne donnent d'autres puissances de α que celles qui déjà sont comprises entre les puissances α^0, α^1, α^2 .... α^λ, puisque $\alpha^\lambda = 1$. Donc l'expression (32.) donne précisément les mêmes valeurs de u^k que celle (31.). Elles se succèdent seulement dans un autre ordre. Il en est de même

des résultats que donnent les autres valeurs v_3, v_4 .... v_λ de u^k en y appliquant l'équation (30.). Donc en multipliant u^k par 1^k dans (29.), le nombre des résultats différents n'est nullement λ^2 mais seulement λ, de sorte que l'équation (29.) n'exprime pas plus de valeurs à droite qu'à gauche.

Il en est de même de l'équation (28.). Car nous venons de voir qu'à l'aide de la multiplication par 1^k les λ valeurs de u_1^k, u_2^k, u_3^k, ... peuvent être toujours réduites à une seule, de sorte que leur inégalité peut être toujours exprimée par celle des puissances de 1^k. Donc les résultats de la combinaison des différentes valeurs de u_1^k, u_2^k .... que produit la multiplication des facteurs, se réduisent toujours à ceux qu'offrent les puissances différentes de $1^k = \alpha$. Mais ces résultats ne présentent que λ valeurs différentes, puisque les puissances α^0, α^1, α^2, ... $\alpha^{\lambda-1}$ reparoissent toujours, quelles que soient les valeurs entières qu'on donne à n. Donc le nombre des valeurs à droite dans l'équation (28.) n'est nullement λ^m, mais seulement λ, et égal à celui des valeurs à gauche.

10.

Puisque, en vertu du paragraphe précédent, les différentes valeurs d'une puissance u^k peuvent être toujours exprimées par une seule valeur déterminée de cette quantité, en la multipliant par les différentes valeurs de 1^k, et que le choix de cette valeur déterminée est arbitraire, on pourra partir par préférence des valeurs réelles de u^k, s'il y en a. Donc en écrivant

$$33. \quad u^k = |u|^k . 1^k,$$

la notation $|u|^k$ signifiera par préférence la valeur réelle de u^k, si une telle valeur existe. Nous verrons plus bas les conditions de l'existence et de la non-existence des valeurs réelles des puissances.

11.

Il y a encore à remarquer qu'en écrivant une seule lettre pour exprimer une puissance, par ex. z au lieu de u^γ, comme nous l'avons fait plus haut (§. 4.), cette notation n'est pas incomplète. Il est vrai qu'il auroit fallu écrire $u^\gamma = z . 1^\gamma$ au lieu de $z = u^\gamma$; mais ce qu'on trouve pour une valeur déterminée z de u^γ aura lieu également pour toutes les autres valeurs de cette quantité, puisque le choix de la valeur déterminée de la quantité est arbitraire. Si l'expression d'une puissance par une seule lettre se trouve seulement à un des deux côtés d'une équation comme

par ex. dans l'équation (10. §. 4. IV.), et qu'on veuille exprimer en même temps tous les résultants que l'équation puisse présenter, il n'y a qu'à écrire $z.1^y$ au lieu de z. Cela donne dans l'équation (10.) $u=(z.1^y)^{\frac{1}{y}}=z^{\frac{1}{y}}.1^{y.\frac{1}{y}}=z^{\frac{1}{y}}.1=z^{\frac{1}{y}}$, pour $u^y=z$, de sorte que l'équation (10.) ne change pas de forme.

12.

On voit, par ce qui précède, que tous les théorèmes sur les puissances que nous venons de trouver ont été tirés uniquement des deux équations fondamentales (3. et 4.) sans le moindre secours étranger, sans recourir au développement en séries, ni à l'approximation ou à l'induction. Nous n'avons eu besoin que de la théorie des quatre premières opérations: addition, soustraction, multiplication et division, qui, selon la nature de l'objet, doivent précéder la théorie des puissances. Ce mode de développement semble être propre ici comme ailleurs à la méthode qui convient seule à l'analyse et qui, dans cette science, comme nous l'avons remarqué plus haut, est non moins importante que les résultats eux mêmes.

Mais puisque de cette sorte tout est fondé sur les deux équations hypothétiques (3. et 4.), il faut encore voir si la coexistence des deux équations fondamentales ne peut point être révoquée en doute à cause de quelque contradiction.

La coexistence des deux équations fondamentales (3. et 4.) a été déjà legitimée a posteriori par ce que toutes les conclusions fondées sur les deux équations (3. et 4.) ne nous ont induit nulle part à quelque contradiction. Mais on peut encore prouver a priori, comme suit, que les deux équations (3. et 4.) subsistent l'une à côté de l'autre sans contradiction. En écrivant $1+\frac{k}{y}$ au lieu de k dans l'expression $(u^y)^k$ nous aurons $(u^y)^{1+\frac{k}{y}}$. Cela égale, en vertu de la première équation fondamentale (3.) à $(u^y)^1.(u^y)^{\frac{k}{y}}$ et cette quantité, en vertu de la seconde équation fondamentale (4.) est égale à $u^y.u^{y\frac{k}{y}}=u^y.u^k$ ou bien, en vertu de la première équation fondamentale égale à u^{y+k}. Donc on a suivant les deux équations fondamentales (3. et 4.)

34. $$(u^y)^{1+\frac{k}{y}}=u^{y+k}.$$

Mais le même resultat peut être tiré de la seconde équation fondamentale (3.) seule sans le secours de la première. Car elle donne $(u^y)^{1+\frac{k}{y}} = u^{y\left(1+\frac{k}{y}\right)} = u^{y+k}$. Donc une des deux équations (3. et 4.), appliquée isolément à une puissance quelconque, donne le même résultat que les deux équations appliquées conjointement. Il suit de là que les deux équations ne pourront être en contradiction.

On pourrait donner encore une autre démonstration de la coexistence des deux équations fondamentales, en tirant l'une de l'autre au moyen du passage ordinaire des cas particuliers aux expressions générales. En supposant l'équation (3.), on commenceroit par démontrer l'autre équation (4.) dans les cas où y et k sont des nombres entiers; puis dans les cas où y et k sont fractionnaires, et en passant des valeurs rationnelles aux valeurs irrationnelles par le mode ordinaire, on arriveroit aux cas où les exposans sont irrationnels. Mais ce procédé seroit embarrassant et impliqueroit une sorte d'induction, à cause du passage des cas particuliers aux expressions générales; de l'autre côté on ne toucheroit pas les exposans imaginaires, et enfin on trouveroit que la démonstration, même dans son étendue limitée, ne réussit pas sans faire une seconde hypothèse, savoir celle $u^1 = u$, de sorte qu'au fond on retomberoit dans l'inconvénient d'avoir deux hypothèses au lieu d'une seule. Donc, puisque cette seconde voie n'offre que des pertes sans profit, et que d'ailleurs la coexistence des deux équations (3. et 4.) peut être justifiée parfaitement, comme nous l'avons vu plus haut, les deux hypothèses, ou plutôt postulata, dont nous sommes partis, semblent être préférables.

Avant de passer au développement des puissances en séries, desquelles les fonctions angulaires pourront être tirées immédiatement, nous entamerons la recherche des facultés analytiques, en suivant une marche analogue à celle que nous avons suivie pour les puissances. Après nous donnerons des séries générales de développement applicables également aux puissances, aux facultés et à d'autres fonctions analytiques.

II. Définition et propriétés des facultés analytiques.

13.

En suivant la méthode que nous venons d'appliquer aux puissances, nous supposerons hypothétiquement des fonctions de trois élémens u, x, y soumises aux conditions suivantes:

35. $f(u, x, y+k) = f(u, x, y) \cdot f(u+yx, x, k)$,

36. $f(ku, kx, y) = k^y f(u, x, y)$,

37. $f(u, x, 1) = u$.

Nous donnerons le nom de facultés analytiques à ces fonctions. Puisque la notation de la dépendance déterminée d'une fonction de ses élémens par une lettre comme f n'est pas commode pour le calcul, et qu'au contraire la juxtaposition est plus simple et plus convenable pour cela, nous exprimerons une faculté analytique, désignée ci-dessus par $f(u, x, y)$, par $(u, +x)^y$. La virgule placée entre les élémens u et x indique que ces élémens ne doivent pas être simplement additionnés, mais plutôt combinés suivant les règles que les équations fondamentales expriment implicitement. Cette notation adoptée, les équations fondamentales des facultés analytiques (35., 36., 37.) se présentent comme suit:

38. $(u, +x)^{y+k} = (u, +x)^y (u+yx, +x)^k$,

39. $(ku, +kx)^y = k^y (u, +x)^y$,

40. $(u, +x)^1 = u$.

Voyons ce qui se tire immédiatement de ces équations à l'aide des règles des quatre premières opérations et de la théorie des puissances.

14.

I. Soit $x = 0$ dans les trois équations (38., 39., 40.), elles donnent

41. $u^{y+k} = u^y \cdot u^k$,

42. $(ku)^y = k^y \cdot u^y$,

43. $u^1 = u$.

Mais ces équations expriment les propriétés caractéristiques des puissances, donc les puissances sont un cas particulier des facultés, savoir celui où des trois élémens u, x, y celui x est zéro.

II. Soit dans la première équation fondamentale (38.) $y=1$ et $k=1$, elle donne $(u,+x)^2=(u,+x)^1(u+x,+x)^1$. Soit en second lieu $y=2$, $k=1$ dans la même équation, on aura

$$(u+x)^3=(u,+x)^2(u+2x,+x)^1,$$

et en vertu de ce qu'on vient de trouver

$$(u,+x)^3=(u,+x)^1(u+x,+x)^1(u+2x,+x)^1.$$

En continuant on trouve

$$(u,+x)^4=(u,+x)^1(u+x,+x)^1(u+2x,+x)^1(u+3x,+x)^1,$$

et généralement

$$(u,+x)^m=(u,+x)^1(u+x,+x)^1(u+2x,+x)^1\ldots(u+(m-1)x,+x)^1,$$

m étant un nombre entier. Mais en vertu de la troisième équation fondamentale on a $(u,+x)^1=u$; $(u+x,+x)^1=u+x$; $(u+2x,+x)^1=u+2x\ldots$ $(u+(m-1)x,+x)^1=u+(m-1)x$. Donc on a

44. $$(u,+x)^m=u(u+x)(u+2x)(u+3x)\ldots(u+(m-1)x)$$

pour le cas où m est un nombre entier.

Cela fait voir que dans les cas où des trois élémens u, x, y celui y est un nombre entier, les facultés analytiques seront des produits de facteurs équidifférents. On leur a donné dans ce cas le nom de factorielles.

III. A cause de l'analogie des facultés avec les puissances, et de leur accord dans un cas particulier, nous donnerons à leurs élémens des noms analogues à ceux des élémens des puissances.

Des trois élémens u, x, y d'une faculté $(u,+x)^y$ nous nommerons

le premier u, base,
le second x, différence et
le troisème y, exposant.

Quant à la notation adoptée ci-dessus, elle sera justifiée par le passage des facultés aux puissances, dans le cas d'exposans entiers. Nous avons mis l'exposant au côté droit de la base et un peu plus haut, comme dans les puissances. La différence a été placée à côté de la base, et sur la même ligne, parcequ'elle peut se combiner avec la base par la voie de l'addition, comme on le voit dans les factorielles. Elle a été separée de la base par une virgule, pour indiquer qu'elle ne doit être ajoutée que sous quelques conditions.

On a aussi coutume de désigner une faculté $(u,+x)^y$ par $u^{y,x}$, où la différence est placée à côté de l'exposant; mais il paroît être beaucoup plus naturel et conforme à la nature de la fonction dont il s'agit, de placer la différence à côté de la base, parcequ'elle se combine bien avec elle par la voie de l'addition ou de la soustraction, mais non pas avec l'exposant. Il est bien vrai que les notations dans les mathématiques sont arbitraires, mais elles ne le sont pas absolument; elles ne le sont que jusqu'à de certaines limites tracées par les règles indispensables de la conséquence, sans laquelle les mathématiques n'existent pas. Certes la conséquence est tellement inséparable de cette science qu'il n'est pas permis de la négliger, même dans les points les moins essentiels. Et la notation n'est pas de ces points; elle est beaucoup plus importante qu'elle ne semble l'être à la première vue. Les signes sont la langue des mathématiques et l'art de la notation est celui de cette langue. Qu'on nous pardonne cette remarque: elle est susceptible de nombreuses applications dans toutes les parties de l'analyse.

IV. Si dans la seconde équation fondamentale (39.) l'exposant y est un nombre entier, elle donne en vertu de (II. 44.):

45. $ku(ku+kx)(ku+2kx)\ldots.(ku+(y-1)kx)=k^y u(u+x)(u+2x)\ldots.(u+(y-1)x).$

Cette équation est identique et fait voir que les trois équations fondamentales n'impliquent point de contradiction dans le cas d'exposans entiers.

V. Soit dans la première équation fondamentale (38.) $y=0$ et $k=1$, elle donne $(u,+x)^1=(u,+x)^0(u,+x)^1$ et en vertu de (40.) $u=(u,+x)^0 u$. De là on tire $(u,+x)^0=\frac{u}{u}$ ou bien

$$46. \quad (u,+x)^0=1.$$

La valeur d'une faculté quelconque est donc l'unité dans le cas où l'exposant est zéro.

VI. Ecrivons dans la première équation fondamentale (38.) $-y$ au lieu de $+y$ et y au lieu de x, elle donne $(u,+x)^0=(u,+x)^{-y}(u-yx,+x)^y$. Cela donne en vertu de (46.)

$$47. \quad (u,+x)^{-y}=\frac{1}{(u-yx,+x)^y}.$$

Cela exprime une faculté à exposant négatif par une autre dont l'exposant est positif et de la même grandeur.

Si dans (47.) on fait $y=1$, on a $(u,+x)^{-1}=\frac{1}{(u-x,+x)^1}$ et en vertu de (40.)

$$48.\quad (u,+x)^{-1}=\frac{1}{u-x}$$

et si l'on écrit $-x$ au lieu de $+x$,

$$49.\quad (u,-x)^{-1}=\frac{1}{u+x}.$$

VII. L'expression (44.) fait voir que, dans le cas d'exposant entier et positif, la valeur d'une faculté est zéro si la base l'est. L'expression (47.) apprend que, dans le même cas, mais l'exposant étant négatif, la valeur de la faculté n'est pas zéro, mais en vertu de (44.) $(0,+x)^{-y}=\frac{1}{-yx.-(y-1)x.-(y-2)x....-x}$, ou bien

$$50.\quad (0,+x)^{-y}=\pm\frac{1}{x.2x.3x.4x....yx}.$$

Nous verrons plus bas quelles sont les valeurs des facultés à exposans quelconques dans le cas où la base est zéro.

VIII. Si dans la première équation fondamentale (38.) on écrit y à la place de k et k à la place de y, elle donne

$$51.\quad (u,+x)^{y+k}=(u,+x)^k(u,+kx,+x)^y$$

donc on a $(u,+x)^k(u+kx,+x)^y=(u,+x)^y(u+yx,+x)^k$, et de là

$$52.\quad \frac{(u+kx,+x)^y}{(u,+x)^y}=\frac{(u+yx,+x)^k}{(u,+x)^k}.$$

IX. Si dans la seconde équation (39.) on fait $k=\frac{1}{u}$ et puis $k=\frac{1}{x}$, elle donne $\left(1,+\frac{x}{u}\right)^y=\frac{1}{u^y}(u,+x)^y$ et $\left(\frac{u}{x},+1\right)^y=\frac{1}{x^y}(u,+x)^y$; donc

$$53.\quad (u,+x)^y=u^y\left(1,+\frac{x}{u}\right)^y \text{ et}$$

$$54.\quad (u,+x)^y=x^y\left(\frac{u}{x},+1\right)^y.$$

X. Multiplions l'équation (54.) par $1=\frac{(1,+1)^{\frac{u}{x}-1}}{(1,+1)^{\frac{x}{u}-1}}$, nous aurons

$(u,+x)^y = x^y \dfrac{(1,+1)^{\frac{u}{x}-1}\left(\frac{u}{x},+1\right)^y}{(1,+1)^{\frac{u}{x}-1}}$. Mais si dans la première équation fondamentale (38.) on fait $u=1$, $x=1$, $y=\frac{u}{x}-1$, et $k=y$, elle donne $(1,+1)^{\frac{u}{x}-1+y} = (1,+1)^{\frac{u}{x}-1}\left(1+\frac{u}{x}-1,+1\right)^y = (1,+1)^{\frac{u}{x}-1}\left(\frac{u}{x},+1\right)^y$. En substituant cette expression de $(1,+1)^{\frac{u}{x}-1}\left(\frac{u}{x},+1\right)^y$ dans celle de $(u,+x)^y$ ci-dessus, on trouve

$$55. \quad (u,+x)^y = x^y . \frac{(1,+1)^{\frac{u}{x}-1+y}}{(1,+1)^{\frac{u}{x}-1}}.$$

On voit par cette expression, qu'une faculté à base et différence quelconques, peut toujours être exprimée par deux autres facultés dont les bases et les différences sont l'unité. Donc toute faculté peut être réduite à d'autres de la dernière forme.

XI. Si dans la première équation fondamentale (38.) on fait $u=1$, $x=1$ et $k=\frac{u}{x}-1$, elle donne $(1,+1)^{\frac{u}{x}-1+y} = (1,+1)^y (1+y,+1)^{\frac{u}{x}-1}$. Mais en vertu de la seconde équation fondamentale (39.) on a $(1+y,+1)^{\frac{u}{x}-1} = \left(\frac{1}{y}+1,+\frac{1}{y}\right)^{\frac{u}{x}-1} y^{\frac{u}{x}-1}$, donc $(1,+1)^{\frac{u}{x}-1+y} = (1,+1)^y \left(\frac{1}{y}+1,+\frac{1}{y}\right)^{\frac{u}{x}-1} . y^{\frac{u}{x}-1}$. En substituant cette expression dans celle (55.) on a

$$56. \quad (u,+x)^y = \frac{(1,+1)^y \left(\frac{1}{y}+1,+\frac{1}{y}\right)^{\frac{u}{x}-1} . y^{\frac{u}{x}-1} . x^y}{(1,+1)^{\frac{u}{x}-1}}.$$

Cette expression peut être utile dans le cas où l'exposant y est infiniment grand. Dans ce cas, à cause de $\frac{1}{y}=0$, l'expression (56.) se réduit à

$$57. \quad (u,+x)^y = \frac{(1,+1)^y y^{\frac{u}{x}-1} x^y}{(1,+1)^{\frac{u}{x}-1}}$$

et si $x=1$, à

$$58. \quad (u,+1)^y = \frac{(1,+1)^y y^{u-1}}{(1,+1)^{u-1}}.$$

Les deux expressions (57. et 58.) n'ont lieu que dans le cas où $y=\infty$.

XII. La première équation fondamentale (38.) donne $(u+yx,+x)^k = \frac{(u,+x)^{y+k}}{(u,+x)^y}$. Faisant $yx=v$, cela se réduit à

$$59. \quad (u+v,+x)^k = \frac{(u,+x)^{\frac{v}{x}+k}}{(u,+x)^{\frac{v}{x}}}.$$

Cette formule sert à exprimer, par deux facultés qui ont la même base et la même différence, une autre faculté qui a la même différence mais une autre base quelconque.

XIII. Si dans la seconde équation fondamentale (39.) on fait $k=\frac{w}{x}$, elle donne $\left(\frac{wu}{x},+w\right)^y = \left(\frac{w}{x}\right)^y (u,+x)^y$. Mais en vertu de la première équation fondamentale (38.) on a

$$(v,+w)^{\frac{u}{x}-\frac{v}{w}+y} = (v,+w)^{\frac{u}{x}-\frac{v}{w}}\left(v+w\left(\frac{u}{x}-\frac{v}{w}\right),+w\right)^y = (v,+w)^{\frac{u}{x}-\frac{v}{w}}\left(\frac{wu}{x},+w\right)^y$$

et de là

$$\left(\frac{wu}{x},+w\right)^y = \frac{(v,+w)^{\frac{u}{x}-\frac{v}{w}+y}}{(v,+w)^{\frac{u}{x}-\frac{v}{w}}}.$$

En substituant cela dans l'expression de $\left(\frac{wu}{x},+w\right)^y$ ci-dessus et multipliant par $\left(\frac{x}{w}\right)^y$, on trouve

$$60. \quad (u,+x)^y = \left(\frac{x}{w}\right)^y \frac{(v,+w)^{\frac{u}{x}-\frac{v}{w}+y}}{(v,+w)^{\frac{u}{x}-\frac{v}{w}}}.$$

A l'aide de cette formule on pourra réduire une faculté à deux autres ayant mêmes bases et mêmes différences mais de grandeur arbitraire.

XIV. Si dans l'expression (60.) on fait $v=u$ et $x=w+k$, elle donne $(u,+w+k)^y = \left(\frac{w+k}{w}\right)^y \frac{(u,+w)^{\frac{u}{w+k}-\frac{u}{w}+y}}{(u,+w)^{\frac{u}{w+k}-\frac{u}{w}}}$, ou bien, en mettant x à la place de w, et réduisant:

$$61. \quad (u,+x+k)^y = \left(1+\frac{k}{x}\right)^y \frac{(u,+x)^{-\frac{uk}{x(x+k)}+y}}{(u,+x)^{-\frac{uk}{x(x+k)}}}.$$

Si $x = 1$ et qu'on écrive k au lieu de $1 + k$, on a

$$62. \quad (u, +x)^y = k^y \frac{(u, +1)^{\frac{u}{x} - u + y}}{(u, +1)^{\frac{u}{x} - u}}.$$

Les formules (61. et 62.) peuvent servir à exprimer par deux facultés à mêmes bases et différences une troisième qui a également la même base mais une autre différence quelconque.

XV. Si dans la seconde équation fondamentale (39.) on fait $k = 1$, elle donne

$$63. \quad (u, +x)^y = 1^y (u, +x)^y$$

et de là

$$64. \quad \frac{(u, +x)^y}{(u, +x)^y} = 1^y.$$

Ces équations en vertu des réflexions semblables à celles (§. 5.) font voir, qu'une faculté a plusieurs valeurs différentes, si la puissance de l'unité prise avec l'exposant de la faculté en a, et nommément le même nombre de valeurs que cette puissance elle même. Si donc on veut exprimer une des valeurs différentes quelconque de la faculté, par ex. la valeur réelle, s'il y en a, par $|u, +x|^y$, on pourra écrire

$$65. \quad (u, +x)^y = |u, +x|^y . 1^y$$

et cette équation donnera toutes les valeurs différentes de la faculté, à l'aide des valeurs différentes de la puissance 1^y de l'unité. On voit encore par l'expression (65.) que le nombre des valeurs différentes d'une faculté dépend uniquement de l'exposant et non de la base ou de la différence.

15.

Telles sont les expressions principaux sur les facultés analytiques qui peuvent être tirés immediatement de leurs équations fondamentales supposées hypothétiquement. Au lieu de la troisième équation (40.) on pourroit peut-être faire l'hypothèse d'une autre équation plus générale, analogue à le seconde équation fondamentale des puissances $(u^y)^k = u^{yk}$ (4.), savoir de l'équation

$$66. \quad ((u, +x, +yx)^y)^k = (u, +x)^{ky}$$

qui, combinée avec les deux premières équations (38. et 39.) donneroit la troisième $(u, +x)^1 = u$ et la remplaceroit. Si y et k sont des nombres

entiers, cette équation (66.) donneroit l'expression suivante

$$67.\quad (u,+x)^{yk} = u(u+x)(u+2x)\ldots.(u+(y-1)x)$$
$$(u+yx)(u+(y+1)x)\ldots.(u+(2y-1)x)$$
$$(u+2yx)(u+(2y+1)x)\ldots.(u+(3y-1)x)$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$(u+(k-1)yx)(u+((k-1)y+1)x)\ldots.(u+kyx).$$

Nous remettons la recherche de l'équation (66.) et de ses applications à une autre occasion et passons au développement des puissances et des facultés en séries. Et pour exécuter ce développement, nous commencerons par donner les développemens généraux des fonctions en séries.

III. Formules générales de développement.

16.

Il y a des cas où les valeurs numériques d'une fonction, celles de ses élémens étant données, peuvent être calculées à l'aide des quatre premières opérations suivant les expressions des propriétés de la fonction, et il y a en d'autres, plus fréquents, où cela n'est pas possible. Les fonctions qu'on appelle entières et fractionnaires sont dans le premier cas. Les puissances et les facultés le sont également si leurs exposans sont des nombres entiers; car dans ce cas elles ne sont que des produits de facteurs égaux ou équidifférents, qui peuvent être calculés par la multiplication et l'addition seulement. Les puissances à exposans fractionnaires sont encore dans le premier cas si leur racines sont rationnelles. La valeur numérique de toute autre puissance ou faculté ne peut être calculée immédiatement par les expressions en forme finie de leurs propriétés, ni par celles qu'on en tire par la transformation.

Mais tout calcul numérique se réduit enfin à l'addition, soustraction, multiplication et division de nombres entiers, et il n'y a pas au fond d'autre opération pour les nombres. Donc si les valeurs numériques des fonctions ne peuvent pas être calculées immediatement suivant les expressions de leurs propriétés, il n'y a d'autre moyen que de transformer ces expressions en séries de termes composés seulement de fonctions rationnelles entières ou fractionnaires, propres à être calculés par les quatre premières operations. Ces séries seront toujours nécessairement infinies,

car si elles ne l'étoient pas, les fonctions qu'elles représentent seroient, comme dans le premier cas, rationnelles et calculables directement. Mais puisqu'on ne peut pas calculer un nombre infini de termes, le calcul numérique de fonctions irrationnelles ne peut s'exécuter qu'approximativement, et il faut que la série qui représente la fonction soit convergente, c'est-à-dire, que la somme d'un nombre quelconque de ses premiers termes, diffère d'autant moins de la somme de la série totale, que le nombre des termes qu'on calcule est plus grand, que cette différence, ou bien le *reste* de la série, diminue au delà de toute quantité aussi petite qu'on voudra et qu'il soit zéro pour un nombre infini de termes. La série sera d'autant plus utile que sa convergence sera plus rapide.

Le moyen généralement applicable au développement des fonctions en séries, est le même qui fait naître le calcul différentiel et intégral et le calcul des différences. C'est de faire varier par la voie de l'addition ou soustraction les valeurs des élémens des fonctions et de calculer les variations qu'éprouvent par là les valeurs des fonctions elles mêmes. Les développemens propres pour cela s'exécutent suivant une formule générale, applicable à une fonction quelconque et semblable à la série de Taylor qui en est un cas particulier. On pourroit l'appeler série générale de Taylor. Elle est connue depuis longtems quant à sa forme qui est celle de la série de Newton. Mais la méthode ordinaire de la démontrer ne semble pas être rigoureuse; aussi néglige-t-on ordinairement l'expression finie du reste de la série et la recherche de sa convergence. Il s'agit donc de compléter cela et de donner une démonstration rigoureuse de cette formule. Son développement peut être exécuté par la voie des transformations purement identiques, qui par leur nature sont exemptes de toute incertitude. L'idée principale de ces transformations se trouve dans les mémoires de Mr. Servois des années 1805, 1809 et 1814 sur les principes du calcul différentiel. Nous partirons de cette idée en modifiant son application, surtout dans le cas des différentielles, pour lequel il y a des remarques essentielles à faire et en complétant le développement de la série par l'expression du reste et par la recherche de sa convergence.

17.

Soit Fx une fonction quelconque de x et k une variation quelconque de l'élément x, on pourra écrire identiquement:

$$68. \quad F(x+k) = Fx + k.\frac{F(x+k)-Fx}{k}.$$

En supposant

$$69. \quad \frac{F(x+k)-Fx}{k} = fx$$

on a

$$70. \quad F(x+k) = Fx + k\,fx.$$

Mettons $x+\alpha$ au lieu de x et en même tems $k-\alpha$ au lieu de k, de sorte que $x+k$ conserve la même valeur, l'expression (70.) se transformera en

$$71. \quad F(x+k) = F(x+\alpha) + (k-\alpha)\,f(x+\alpha).$$

Soustrayant l'expression primitive (70.) de celle (71.) on aura

$$0 = F(x+\alpha) - Fx + (k-\alpha)f(x+\alpha) - kfx$$

ou bien

$$72. \quad 0 = F(x+\alpha) - Fx + (k-\alpha)(f(x+\alpha) - fx) - \alpha fx.$$

Désignons par la caractéristique $\triangle$ les différences des valeurs des fonctions pour les valeurs $x+\alpha$ et x et $k-\alpha$ et k des élémens x et k, l'expression se reduira à

$$73. \quad 0 = \triangle Fx + (k-\alpha)\triangle fx - \alpha fx.$$

Mettons de nouveau $x+\alpha$ au lieu de x et $k-\alpha$ au lieu de k dans cette dernière expression, elle donnera

$$0 = \triangle F(x+\alpha) + (k-2\alpha)\triangle f(x+\alpha) - \alpha f(x+\alpha).$$

En déduisant l'expression (73.), on aura

$$0 = \triangle F(x+\alpha) - \triangle Fx + (k-2\alpha)\triangle f(x+\alpha) - (k-2\alpha)\triangle fx - \alpha\triangle fx - \alpha(f(x+\alpha) - fx)$$

et en écrivant le signe des différences,

$$74. \quad 0 = \triangle^2 Fx + (k-2\alpha)\triangle^2 fx - 2\alpha\triangle fx.$$

En mettant de nouveau $(x+\alpha)$ à la place de x et $k-\alpha$ à la place de k dans la formule (74.) elle donnera

$$0 = \triangle^2 F(x+\alpha) + (k-3\alpha)\triangle^2 f(x+\alpha) - 2\alpha\triangle f(x+\alpha).$$

Déduisant ce résultat de l'expression (74.) on aura

$$0 = \triangle^2 F(x+\alpha) - \triangle^2 Fx + (k-3\alpha)\triangle^2 f(x+\alpha) - (k-3\alpha)\triangle^2 fx - \alpha\triangle^2 fx - 2\alpha(\triangle f(x+\alpha) - \triangle fx).$$

ou bien en mettant le signe $\triangle$,

$$75. \quad 0 = \triangle^3 Fx + (k-3\alpha)\triangle^3 fx - 3\alpha\triangle^2 fx.$$

Continuant la même opération, on aura des résultats toujours semblables et dont la forme est aisée à saisir. Des formules (70. 73. 74. et 75.) et de celles qu'on en peut tirer, en continuant le développement, on aura

$$76.\quad \begin{cases} F(x+k) = Fx + kfx \\ fx = \dfrac{\triangle Fx}{\alpha} + \dfrac{k-\alpha}{\alpha}\triangle fx, \\ \triangle fx = \dfrac{\triangle^2 Fx}{2\alpha} + \dfrac{k-2\alpha}{2\alpha}\triangle^2 fx, \\ \triangle^2 fx = \dfrac{\triangle^3 Fx}{3\alpha} + \dfrac{k-3\alpha}{3\alpha}\triangle^3 fx, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \triangle^{n-2} fx = \dfrac{\triangle^{n-1} Fx}{(n-1)\alpha} + \dfrac{k-(n-1)\alpha}{(n-1)\alpha}\triangle^{n-1} fx, \\ \triangle^{n-1} fx = \dfrac{\triangle^n Fx}{n\alpha} + \dfrac{k-n\alpha}{n\alpha}\triangle^n fx. \end{cases}$$

En substituant ces expressions, la seconde dans la première, la troisième dans le résultat etc., on aura

$$77.\quad \begin{cases} F(x+k) = Fx + kfx, \\ F(x+k) = Fx + \dfrac{k}{\alpha}\triangle Fx + \dfrac{k(k-\alpha)}{\alpha}\triangle fx, \\ F(x+k) = Fx + \dfrac{k}{\alpha}\triangle Fx + \dfrac{k(k-\alpha)}{2\alpha^2}\triangle^2 Fx + \dfrac{k(k-\alpha)(k-2\alpha)}{2\alpha^2}\triangle^2 fx, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{cases}$$

etc., et généralement, en restituant encore la valeur de fx (69.)

$$78.\quad F(x+k) = Fx + \frac{k}{\alpha}\triangle Fx + \frac{k(k-\alpha)}{2\alpha^2}\triangle^2 Fx + \frac{k(k-\alpha)(k-2\alpha)}{2.3\alpha^3}\triangle^3 Fx \ldots$$
$$\ldots + \frac{k(k-\alpha)(k-2\alpha)\ldots(k-(n-1)\alpha)}{2.3\ldots n\alpha^n}\triangle^n Fx$$
$$+ \frac{k(k-\alpha)(k-2\alpha)\ldots(k-n\alpha)}{2.3\ldots n\alpha^n}\triangle^n\left(\frac{F(x+k)-Fx}{k}\right).$$

Les coëfficiens de $\triangle Fx$, $\triangle^2 Fx$ etc. dans les termes de cette expression sont $\frac{k}{\alpha}$, $\frac{\frac{k}{\alpha}\left(\frac{k}{\alpha}-1\right)}{1.2}$, $\frac{\frac{k}{\alpha}\left(\frac{k}{\alpha}-1\right)\left(\frac{k}{\alpha}-2\right)}{1.2.3}$ .... Si pour abréger on les désigne par $\left(\frac{k}{\alpha}\right)_1$ $\left(\frac{k}{\alpha}\right)_2$ $\left(\frac{k}{\alpha}\right)_3$...., on peut aussi écrire

$$79.\quad F(x+k) = Fx + \left(\frac{k}{a}\right)_1 \triangle Fx + \left(\frac{k}{a}\right)_2 \triangle^2 Fx + \left(\frac{k}{a}\right)_3 \triangle^3 Fx \ldots$$
$$\ldots + \left(\frac{k}{a}\right)_n \triangle^n Fx + \left(\frac{k}{a}\right)_n (k - n\alpha)\, \triangle^n \left(\frac{F(x+k) - Fx}{k}\right).$$

Telle est la formule générale de développement qu'on peut appeler formule générale de Taylor. Elle est, comme on voit, semblable à la série de différences de Newton et applicable à une fonction quelconque Fx pour la développer en série. Elle donne en même tems une expression finie du reste de la série. Si l'on désigne par R_n ce reste, savoir celui qui suit les n premiers termes de la série après le terme Fx, on a

$$80.\quad R_n = \left(\frac{k}{\alpha}\right)_n (k - n\alpha) \triangle^n \left(\frac{F(x+k) - Fx}{k}\right)$$
$$= \frac{k(k-\alpha)(k-2\alpha)\ldots(k-n\alpha)}{2.3\ldots n} \triangle^n \left(\frac{F(x+k) - Fx}{k}\right).$$

La série, comme nous l'avons vu, a été trouvée par le seul moyen de transformations identiques. Son développement est donc établi de la manière la plus rigoureuse. La série est semblable à celle de Mr. Servois, mais elle en diffère en quelque sorte, surtout par l'expression du reste, qui s'offre en même tems.

Quant à l'application de la caractéristique $\triangle$ à l'expression du reste, il y a à remarquer que toutes les fois qu'on écrit $x + \alpha$ au lieu de x il faut, en vertu de la règle adoptée pour le développement, mettre en même tems $k - \alpha$ au lieu de k, de sorte que $x + k$ conserve la même valeur. On aura suivant cette règle par ex.

$$81.\quad \begin{cases} \triangle \dfrac{F(x+k) - Fx}{k} = \dfrac{F(x+k) - F(x+\alpha)}{k-\alpha} - \dfrac{F(x+k) - Fx}{k}, \\ \triangle^2 \dfrac{F(x+k) - Fx}{k} = \dfrac{F(x+k) - F(x+2\alpha)}{k-2\alpha} - 2\dfrac{F(x+k) - F(x+\alpha)}{k-\alpha} + \dfrac{F(x+k) - Fx}{k}. \end{cases}$$

Si l'on vouloit développer l'expression du reste, on trouveroit que tous les termes de la série se détruisent, et cela doit arriver effectivement à cause de l'identité de l'expression. Par ex. si l'on s'arrête au second terme de la série en écrivant

$$F(x+k) = Fx + \frac{k}{\alpha} \triangle Fx + \frac{k(k-\alpha)}{2\alpha^2} \triangle^2 Fx + \frac{k(k-\alpha)(k-2\alpha)}{2\alpha^2} \triangle^2 \frac{F(x+k) - Fx}{k},$$

on a

$$F(x+k) = Fx + \frac{kF(x+\alpha)-kFx}{\alpha} + \frac{k(k-\alpha)F(x+2\alpha)-2k(k-\alpha)F(x+\alpha)+k(k-\alpha)Fx}{2\alpha^2}$$
$$+ \frac{k(k-\alpha)(k-2\alpha)}{2\alpha^2}\left[\frac{F(x+k)-F(x+2\alpha)}{k-2\alpha} - 2\frac{F(x+k)-F(x+\alpha)}{k-\alpha} + \frac{F(x+k)-Fx}{k}\right],$$

et cela donne

$$0 = \left(\frac{k(k-\alpha)-2k(k-2\alpha)+(k-\alpha)(k-2\alpha)}{2\alpha^2} - 1\right)F(x+k)$$
$$+ \left(1 - \frac{k}{\alpha} + \frac{k(k-\alpha)}{2\alpha^2} - \frac{(k-\alpha)(k-2\alpha)}{2\alpha^2}\right)Fx$$
$$+ \left(\frac{k}{\alpha} - \frac{2k(k-\alpha)}{2\alpha^2} + \frac{k(k-2\alpha)}{\alpha}\right)F(x+\alpha)$$
$$+ \left(\frac{k(k-\alpha)}{2\alpha^2} - \frac{k(k-\alpha)}{2\alpha^2}\right)F(x+2\alpha)$$

ou bien $0=0$, comme il faut.

Mais il n'y a nullement à craindre que l'expression (78.), à cause de son identité, soit moins un véritable développement, qu'une transformation vague dont tous les termes se détruisent mutuellement. Si les termes de la série (78.) vont en diminuant, il y a déjà lieu de présumer qu'elle donnera approximativement la valeur de la quantité $F(x+k)$ qu'elle exprime, et si l'on peut démontrer que le reste R_n est zéro pour $n=\infty$, la série sera convergente et donnera effectivement la véritable valeur de $F(x+k)$. Ce seroit une erreur de soupçonner qu'une transformation identique ne puisse fournir un développement réel. Au contraire, tout développement exact ne peut être qu'une transformation identique. Le développement d'une fonction en série convergente n'est jamais qu'une transformation identique de son expression en une autre composée de termes rationnels et décroissants jusqu'à zéro et dont le reste, qui suit un nombre infini de termes, est zéro.

18.

Les quotiens $\frac{\triangle Fx}{\alpha}$, $\frac{\triangle^2 Fx}{\alpha^2}$, $\frac{\triangle^3 Fx}{\alpha^3}$, ... des termes de la série générale de Taylor (78.), si l'on y fait $x=0$, n'étant autre chose que les coëfficiens différentiels de la série particulière de Taylor, il semble à la première vue, que cette dernière série puisse être tirée immediatement de la série générale, si l'on suppose que les factorielles $k(k-\alpha)$, $k(k-\alpha)(k-2\alpha)$ ....

pour $\alpha = 0$ se réduisent aux puissances k^2, k^3, k^4 ...., car dans ce cas la série (78.), en y écrivant ∂Fx, $\partial^2 Fx$, ... au lieu de $\frac{\triangle Fx}{\alpha}$, $\frac{\triangle^2 Fx}{\alpha^2}$ .... donne

$$82. \quad F(x+k) = Fx + k\partial Fx + \frac{k^2}{2}\partial^2 Fx + \frac{k^3}{2.3}\partial^3 Fx \ldots.$$
$$\ldots. + \frac{k^n}{2.3\ldots.n}\partial^n Fx + \frac{k^{n+1}}{2.3\ldots.n}\partial^n\left(\frac{F(x+k)-Fx}{k}\right)$$

et c'est la série particulière de Taylor.

Cette réduction de la série générale (78.) à la série particulière se justifie complètement dans le cas où la série n'a qu'un nombre fini de termes, car dans ce cas les factorielles $k(k-\alpha)$, $k(k-\alpha)(k-2\alpha)$, ... $k(k-\alpha)(k-2\alpha)$ .... $(k-n\alpha)$ se réduisent pour $\alpha = 0$, sans le moindre doute, aux puissances k^2, k^3, ... k^{n+1}. Mais si la série se prolonge à l'infini, c'est-à-dire que n puisse être ∞, on n'est pas sûr, que la factorielle $k(k-\alpha)(k-2\alpha)\ldots.(k-n\alpha)$ soit égale à la puissance k^{n+1}, puisque la valeur du facteur $k-n\alpha$ pourroit être quelque autre quantité que k, même ou zéro ou infini pour $\alpha = 0$ et $n = \infty$. On ne peut donc tirer immédiatement la série particulière de Taylor de la série générale dans tous les cas. Son développement a besoin plutôt encore de quelques autres réflexions, et d'autant plus que la série n'a effectivement lieu que sous certaines conditions.

Parmi les modes nombreux de développement qui existent de la série particulière de Taylor, celui que donne Lagrange dans la théorie des fonctions se distingue par sa clarté et sa généralité. Mais ce développement suppose hypothétiquement la forme de la série et sa convergence. Mr. Servois, dans les mémoires cités plus haut, donne un développement de la série sans faire ces hypothèses; mais dans son développement, les coëfficiens différentiels se présentent sous la forme de séries dont la convergence peut offrir des difficultés. Voici comment on peut démontrer la série particulière de Taylor uniquement à l'aide des transformations identiques, et de sorte qu'en même tems les conditions de l'existence du développement se font voir.

1. Soit comme ci-dessus l'équation identique

$$83. \quad F(x+k) = Fx + k\left(\frac{F(x+k)-Fx}{k}\right) \text{ et } \frac{F(x+k)-Fx}{k} = fx,$$

de sorte que

$$84. \quad F(x+k) = Fx + kfx.$$

Faisons varier x de α et k de $-\alpha$, comme plus haut, on aura

$$F(x+k) = F(x+\alpha) + (k-\alpha)f(x+\alpha),$$

et en retranchant de cette équation celle (84.)

$$85. \quad 0 = \triangle Fx + k\triangle fx - \alpha f(x+\alpha).$$

Mettons de nouveau $x+\alpha$ et $k-\alpha$ au lieu de x et k, nous aurons

$$0 = \triangle F(x+\alpha) + (k-\alpha)\triangle f(x+\alpha) - \alpha f(x+2\alpha)$$

et en y retranchant l'équation (85.)

$$86. \quad 0 = \triangle^2 Fx + k\triangle^2 fx - 2\alpha\triangle f(x+\alpha).$$

En mettant encore $x+\alpha$ et $k-\alpha$ au lieu de x et k, l'équation (86.) donne

$$0 = \triangle^2 F(x+\alpha) + (k-\alpha)\triangle^2 f(x+\alpha) - 2\alpha\triangle f(x+2\alpha)$$

et en en déduisant celle (86.)

$$87. \quad 0 = \triangle^3 Fx + k\triangle^3 fx - 3\triangle^2 f(x+\alpha).$$

En continuant toujours la même opération, on aura, comme les équations (83., 84., 85., 86.) le font voir:

$$88. \quad \begin{cases} F(x+k) = Fx + kfx, \\ f(x+\alpha) = \dfrac{\triangle fx}{\alpha} + k\dfrac{\triangle fx}{\alpha}, \\ \dfrac{\triangle f(x+\alpha)}{\alpha} = \dfrac{\triangle^2 Fx}{2\alpha^2} + \dfrac{k}{2}\dfrac{\triangle^2 fx}{\alpha^2}, \\ \dfrac{\triangle^2 f(x+\alpha)}{2\alpha^2} = \dfrac{\triangle^3 Fx}{2.3\alpha^3} + \dfrac{k}{2.3}\dfrac{\triangle^3 fx}{\alpha^3}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \dfrac{\triangle^n f(x+\alpha)}{2.3\ldots(n-1)\alpha^{n-1}} = \dfrac{\triangle^n Fx}{2.3\ldots n\alpha^n} + \dfrac{k}{2.3\ldots n}\dfrac{\triangle^n fx}{\alpha^n}. \end{cases}$$

II. Ces équations, puisqu'elles sont identiques, subsistent sans aucune condition ni restriction. Quand on y fait $\alpha = 0$, les quantités $\frac{\triangle Fx}{\alpha}$, $\frac{\triangle^2 Fx}{\alpha^2}$, $\frac{\triangle^3 Fx}{\alpha^3}$ .... et $\frac{\triangle fx}{\alpha}$, $\frac{\triangle^2 fx}{\alpha^2}$, $\frac{\triangle^3 fx}{\alpha^3}$ .... se réduisent aux coëfficiens différentiels de divers ordres des fonctions Fx et fx, que nous désignerons par ∂Fx, $\partial^2 Fx$, $\partial^3 Fx$ ....; ∂fx, $\partial^2 fx$, $\partial^3 fx$ .... Si maintenant fx, c'est-à-dire $\frac{F(x+k)-Fx}{k}$ (69.) est tel, que $f(x+\alpha)$,

$\frac{\Delta f(x+\alpha)}{\alpha}$, $\frac{\Delta^2 f(x+\alpha)}{\alpha^2}$...., dans le cas de $\alpha=0$, ne différent pas de fx, $\frac{\Delta fx}{\alpha}$, $\frac{\Delta^2 fx}{\alpha^2}$...., les quantités $\frac{\Delta f(x+\alpha)}{\alpha}$, $\frac{\Delta^2 f(x+\alpha)}{\alpha^2}$, $\frac{\Delta^3 f(x+\alpha)}{\alpha^3}$.... se réduisent également aux coëfficiens différentiels ∂fx, $\partial^2 fx$, $\partial^3 fx$.... et $f(x+\alpha)$ se réduit à fx. Donc sous cette condition les équations (88.) se réduisent à

$$89.\quad \begin{cases} F(x+k) = Fx + kfx, \\ fx = \partial Fx + k\partial fx, \\ \partial fx = \frac{\partial^2 Fx}{2} + \frac{k\partial^2 fx}{2}, \\ \frac{\partial^2 fx}{2} = \frac{\partial^3 Fx}{2.3} + \frac{k\partial^3 fx}{2.3}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \frac{\partial^{n-1} fx}{2.3....(n-1)} = \frac{\partial^n Fx}{2.3....n} + \frac{k\partial^n fx}{2.3....n}, \end{cases}$$

Substituant ces expressions, la seconde dans la première, la troisième dans le résultat etc. on aura

$$90.\quad \begin{cases} F(x+k) = Fx + k\partial Fx + k^2\partial fx, \\ F(x+k) = Fx + k\partial Fx + \frac{k^2}{2}\partial^2 Fx + \frac{k^3}{2}\partial^2 fx, \\ F(x+k) = Fx + k\partial Fx + \frac{k^2}{2}\partial^2 Fx + \frac{k^3}{2.3}\partial^3 Fx + \frac{k^4}{2.3}\partial^3 fx. \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{cases}$$

et en général, si l'on restitue encore l'expression de fx (69.)

$$91.\quad F(x+k) = Fx + k\,\partial Fx + \frac{k^2}{2}\partial^2 Fx + \frac{k^3}{2.3}\partial^3 Fx .... \\ .... + \frac{k^n}{2.3....n}\partial^n Fx + \frac{k^{n+1}}{2.3....n}\partial^n\left(\frac{F(x+k)-Fx}{k}\right).$$

C'est, comme on voit, la série particulière de **Taylor**. L'expression du reste de la série, qui suit ses n premiers termes après celui Fx et que nous avons désigné plus haut par R_n, est ici

$$92.\quad R_n = \frac{k^{n+1}}{2.3....n}\partial^n\left(\frac{F(x+k)-Fx}{k}\right)$$

où la notation ∂^n veut dire, que dans le quotient $\frac{F(x+k)-Fx}{k}$ on doit mettre $x+\alpha$ au lieu de x et $k-\alpha$ au lieu de k, puis retrancher du ré-

sultat le quotient primitif, faire $\alpha = 0$ dans la différence et répéter n fois cette opération.

III. Le développement que nous venons de faire de la série particulière de Taylor s'exécute, comme on voit, seulement à l'aide de transformations identiques. Il est donc exempt de toute incertitude, aussi bien que celui ci-dessus de la série générale de Taylor.

Mais en même tems il fait voir les conditions qui doivent être remplies si l'on veut que la série subsiste. Elles s'expriment par les équations suivantes:

$$93.\quad \left\{\begin{array}{l} f(x+\alpha) = fx \\ \dfrac{\triangle f(x+\alpha)}{\alpha} = \dfrac{\triangle fx}{\alpha} \\ \dfrac{\triangle^2 f(x+\alpha)}{\alpha^2} = \dfrac{\triangle^2 fx}{\alpha^2} \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \dfrac{\triangle^n f(x+\alpha)}{\alpha^n} = \dfrac{\triangle^n fx}{\alpha^n} \end{array}\right\} \text{pour } \alpha = 0.$$

Puisque $f(x+\alpha) - fx = \triangle fx$, $\triangle f(x+\alpha) - \triangle fx = \triangle^2 fx$, $\triangle^2 f(x+\alpha) - \triangle^2 fx = \triangle^3 fx$ etc., elles peuvent être aussi exprimées par

$$94.\quad \left\{\begin{array}{l} \triangle fx = 0 \\ \dfrac{\triangle^2 fx}{\alpha} = 0 \\ \dfrac{\triangle^3 fx}{\alpha^2} = 0 \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \dfrac{\triangle^n fx}{\alpha^{n-1}} = 0 \end{array}\right\} \text{pour } \alpha = 0.$$

ou bien, $\dfrac{\triangle fx}{\alpha}$ étant $= \partial fx$, $\dfrac{\triangle^2 fx}{\alpha^2} = \partial^2 fx$, $\dfrac{\triangle^3 fx}{\alpha^3} = \partial^3 fx$ etc. pour $\alpha = 0$, par

$$95.\quad \left\{\begin{array}{l} \alpha\,\partial fx = 0, \\ \alpha\,\partial^2 fx = 0, \\ \alpha\,\partial^3 fx = 0, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \alpha\,\partial^n fx = 0. \end{array}\right.$$

IV. Les équations (94. et 95.) donnent les conditions de l'existence de la série (91.) et elles les expriment par la quantité $fx = \frac{F(x+k) - Fx}{k}$. Mais on peut les réduire aussi à d'autres qui se rapportent à la fonction Fx elle même.

Les équations (76.), en partant de la seconde, donnent

$$96. \quad \left\{ \begin{array}{l} \alpha fx = \triangle Fx + (k-\alpha)\triangle fx, \\ \triangle fx = \frac{\triangle^2 Fx}{2\alpha} + \frac{k-2\alpha}{2} \cdot \frac{\triangle^2 fx}{\alpha}, \\ \frac{\triangle^2 fx}{\alpha} = \frac{\triangle^3 Fx}{3\alpha^2} + \frac{k-3\alpha}{3} \cdot \frac{\triangle^3 fx}{\alpha^2}, \\ \frac{\triangle^3 fx}{\alpha^2} = \frac{\triangle^4 Fx}{4\alpha^3} + \frac{k-4\alpha}{4} \cdot \frac{\triangle^4 fx}{\alpha^3}, \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \frac{\triangle^{n-1} fx}{\alpha^{n-2}} = \frac{\triangle^n Fx}{n\alpha^{n-1}} + \frac{k-n\alpha}{n} \cdot \frac{\triangle^n fx}{\alpha^{n-1}}. \end{array} \right.$$

Supposons que les équations (94.) ont lieu. Dans ce cas la série (91.) aura lieu également, parceque les équations (94.) expriment les conditions de son existence. Substituant les équations (94.) dans celles (96.) et supposant encore

$$97. \quad \alpha fx = 0 \quad \text{pour} \quad \alpha = 0,$$

on aura

$$98. \quad \left\{ \begin{array}{l} \triangle Fx = 0 \\ \frac{\triangle^2 Fx}{\alpha} = 0 \\ \frac{\triangle^3 Fx}{\alpha^2} = 0 \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \frac{\triangle^n Fx}{\alpha^{n-1}} = 0 \end{array} \right\} \text{ pour } \alpha = 0.$$

ou bien, $\frac{\triangle Fx}{\alpha}$ étant $= \partial fx$, $\frac{\triangle^2 Fx}{\alpha^2} = \partial^2 fx$, $\frac{\triangle^3 Fx}{\alpha^3} = \partial^3 fx$ . . . . pour $\alpha = 0$, en réunissant (97. et 98.)

$$99. \quad \left\{ \begin{array}{l} \alpha fx = 0 \\ \alpha \partial Fx = 0 \\ \alpha \partial^2 Fx = 0 \\ \alpha \partial^3 Fx = 0 \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \alpha \partial^n Fx = 0 \end{array} \right\} \text{ pour } \alpha = 0.$$

Si les équations (94.) n'avoient pas lieu, celles (97. et 98.), et par suite (99.) n'auroient pas lieu non plus, comme on le voit par les équations (96.). Donc les équations (99.) expriment les conditions de l'existence de la série (91.) et les équations de condition (95.) sont maintenant réduites à d'autres où entre la fonction Fx. Voyons ce qu'elles donnent pour les coëfficiens ∂Fx, $\partial^2 Fx$ etc.

V. La première des équations (99.) a toujours lieu, même si fx étoit $=\infty$; car puisque la quantité α n'entre pas dans $fx=\frac{F(x+k)-Fx}{k}$, on peut toujours la supposer telle, que αfx soit zéro, par ex. en supposant $\alpha=\frac{1}{(fx)^2}$, on a $\alpha fx=\frac{1}{fx}$ et $\alpha fx=0$, si $fx=\infty$. Mais les autres équations (99.) demandent que les coëfficiens différentiels ∂Fx, $\partial^2 Fx$ .... ne soient pas infiniment grands; car supposons $\partial Fx=\infty$ pour $\alpha=0$, cette quantité étant égale à $\frac{\triangle Fx}{\alpha}$ on auroit $\frac{\triangle Fx}{\alpha}=\infty$ pour $\alpha=0$, donc $\triangle Fx$ pourroit avoir une valeur finie et ne seroit pas nécessairement zéro, résultat contraire à la première des conditions (98.). Supposons $\partial^2 Fx=\infty$ pour $\alpha=0$, cette quantité étant égale à $\frac{\triangle^2 Fx}{\alpha^2}$, on auroit $\frac{\triangle^2 Fx}{\alpha^2}=\infty$ pour $\alpha=0$, donc $\frac{\triangle^2 Fx}{\alpha}$ le seroit également et non pas nécessairement zéro, résultat contraire à la seconde équation (98.) etc.

Les conditions (95.) ou bien (99.) se réduisent donc à ce que ∂Fx, $\partial^2 Fx$ etc. ne doivent pas être ∞. Donc la série particulière de Taylor (91.) ne subsiste que dans les cas où les coëfficiens différentiels ∂Fx, $\partial^2 Fx$, ... $\partial^n Fx$ sont des quantités finies. Elle n'auroit pas lieu si quelques-uns de ces coëfficiens ou un seul coëfficient étoient infinis.

VI. Il y a encore à remarquer que la série particulière de Taylor, si d'ailleurs les coëfficiens différentiels ∂Fx, $\partial^2 Fx$.... ne sont pas des quantités infinies, peut subsister, même dans les cas où k est infiniment grand. Car supposons la condition remplie que ∂Fx, $\partial^2 Fx$ .... sont des quantités finies, les équations (99.) et par suite celles (97. et 98.) auront lieu. Mais si $\alpha Fx=0$ et $\triangle Fx=0$ la première des équations (96.) donne $0=0+(k-\alpha)\triangle fx$, c'est-à-dire $\triangle fx=0$ pour une valeur quelconque de k, et à plus forte raison $\triangle fx=0$ si $k=\infty$. Puis, $\triangle fx$ et $\frac{\triangle^2 Fx}{\alpha}$

étant zéro, la seconde des équations (96.) donne $0 = 0 + \frac{k-2\alpha}{2} \cdot \frac{\Delta^2 fx}{\alpha}$, donc $\frac{\Delta^2 fx}{\alpha}$ est zéro pour une valeur quelconque de k et à plus forte raison $\frac{\Delta^2 fx}{\alpha} = 0$ si $k = \infty$ et ainsi de suite, de sorte que toutes les équations de condition (94.) seront satisfaites également. Donc la série (91.) peut subsister, même dans le cas où k est ∞.

On voit que les conditions que nous venons de trouver pour l'existence et la validité de la série particulière de Taylor doivent nécessairement être connues pour les applications de cette série. D'ailleurs la série n'est pas encore convergente si elle satisfait aux conditions (V.). Ces conditions ne se rapportent qu'à son existence.

19.

Ayant trouvé et démontré les séries que présente le développement d'une fonction quelconque en variant ses élémens, il s'agit maintenant de juger la convergence de ces séries dans les cas définis, c'est-à-dire de juger la valeur du reste de la série. Si cette valeur ne diminue pas en augmentant le nombre des termes et ne converge pas vers zéro, la série est sans but.

Si la valeur du reste de la série pouvoit être trouvée exactement, on pourroit juger immédiatement sa convergence en faisant $n = \infty$ dans l'expression du reste. Si cela donnoit zéro pour la valeur du reste, la série seroit convergente, et divergente dans le cas contraire. Mais il est évidemment impossible de trouver l'expression exacte et finie du reste, toutes les fois que la série est infinie: car si cela étoit possible, on auroit une expression finie de la fonction proposée et sa valeur cesseroit d'être exprimée approximativement par la série comme le demande l'hypothèse, mais par un nombre fini de termes.

Il faudra donc plutôt se contenter d'évaluer approximativement la valeur du reste, c'est-à-dire de trouver des limites dans lesquelles cette valeur doit être comprise.

On connoît les expressions des limites de la valeur du reste de la série particulière de Taylor. Mr. Lagrange les a données par la voie des intégrales définies. Mr. Ampère a simplifié et perfectionné la recherche de ces limites dans un mémoire inséré dans le 13^{me} cahier du journal de l'école polytechnique, et a même étendu ses recherches aux

fonctions de plusieurs variables dans le 11^me^ cahier du 17^me^ tome des annales des mathématiques de Mr. Gergonne. Il ne nous reste donc ici qu'entre prendre la recherche des limites du reste de la série générale de Taylor. Ces limites peuvent être trouvées de la manière suivante.

20.

1. Soit $\varphi(x,k)$ une fonction quelconque des deux quantités x et k, variables toutes les deux, mais soumises à la condition, que si par ex. x varie de α, k varie en même tems de $-\alpha$. Supposons aussi que $\varphi(x,k)$ n'ait pas de valeurs imaginaires ni d'infinies, mais que toutes les valeurs de cette fonction, pour les valeurs différentes de ses élémens x et k, depuis x jusqu'à $x+k$ et depuis k jusqu'à 0, soient réelles et finies, de sorte que $\varphi(x,k)$, dans l'étendue indiquée des élémens, est une fonction continue.

Cela posé, faisons varier continuellement x de α et en même tems, suivant la condition ci-dessus, k de $-\alpha$, on aura en faisant usage du signe Δ,

100.
$$\begin{cases} \varphi(x+\alpha,\ k-\alpha) - \varphi(x,k) = \Delta\varphi x, \\ \varphi(x+2\alpha, k-2\alpha) - \varphi(x+\alpha,\ k-\alpha) = \Delta\varphi(x+\alpha), \\ \varphi(x+3\alpha, k-3\alpha) - \varphi(x+2\alpha, k-2\alpha) = \Delta\varphi(x+2\alpha), \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \varphi(x+m\alpha, k-m\alpha) - \varphi(x+(m-1)\alpha, k-(m-1)\alpha) = \Delta\varphi(x+(m-1)\alpha). \end{cases}$$

La somme de ces équations est

101. $$\varphi(x+m\alpha, k-m\alpha) - \varphi(x,k) = \Delta\varphi x + \Delta\varphi(x+\alpha) + \Delta\varphi(x+2\alpha) \ldots . \\ \ldots . + \Delta\varphi(x+(m-1)\alpha).$$

La quantité α étant arbitraire, on peut supposer $m\alpha = k$. Cela donne, en divisant par k,

102. $$\frac{\varphi(x+k,0) - \varphi(x,k)}{k} = \frac{\Delta\varphi x + \Delta\varphi(x+\alpha) + \Delta\varphi(x+2\alpha) \ldots . + \Delta\varphi(x+(m-1)\alpha)}{m\alpha}.$$

Supposons

103. $$\Delta\varphi x + \Delta\varphi(x+\alpha) + \Delta\varphi(x+2\alpha) \ldots . + \Delta\varphi(x+(m-1)\alpha) = m\Delta\varphi(x+\mu\alpha),$$

l'expression (102.) se réduira à

104. $$\frac{\varphi(x+k,0) - \varphi(x,k)}{k} = \frac{\Delta\varphi(x+\mu\alpha)}{\alpha}.$$

Maintenant l'expression (103.) fait voir que les quantités $\Delta\varphi x$, $\Delta\varphi(x+\alpha)$,

$\Delta\varphi(x+2\alpha)$, ..., soit qu'elles aient toutes le même signe, soit que leurs signes soient différents, ne peuvent être, toutes en même tems, ni plus grandes ni plus petites que la quantité $\Delta\varphi(x+\mu\alpha)$, car si cela étoit, la somme des m quantités $\Delta\varphi x$, $\Delta\varphi(x+\alpha)$, ... seroit ou plus grande ou plus petite que m fois la quantité $\Delta\varphi(x+\mu\alpha)$ et non pas égale à ce multiple de $\Delta\varphi(x+\mu\alpha)$, comme le veut l'équation (103.). Donc, toutes les quantités $\Delta\varphi x$, $\Delta\varphi(x+\alpha)$, ... ne pouvant être égales entre elles, il y en aura nécessairement parmi elles quelques unes de plus grandes et d'autres plus petites que $\Delta\varphi(x+\mu\alpha)$. Donc la valeur de $\Delta\varphi(x+\mu\alpha)$ sera nécessairement comprise entre celle de la plus grande et celle de la plus petite des quantités $\Delta\varphi x$, $\Delta\varphi(x+\alpha)$, $\Delta\varphi(x+2\alpha)$, ... c'est-à-dire entre la plus grande et la plus petite valeur de $\Delta\varphi x$. Donc aussi $\frac{\Delta\varphi(x+\mu\alpha)}{\alpha}$ sera comprise entre la plus grande et la plus petite valeur de $\frac{\Delta\varphi x}{\alpha}$, et, $\frac{\Delta\varphi(x+\mu\alpha)}{\alpha}$ étant égal à $\frac{\varphi(x+k,0)-\varphi(x,k)}{k}$, la valeur de cette dernière quantité sera comprise entre la plus grande et la plus petite valeur que $\frac{\Delta\varphi x}{\alpha}$ ou bien $\frac{\Delta\varphi(x,k)}{\alpha}$ puisse avoir pour les valeurs différentes de x et k, depuis x jusqu'à $x+k$ et depuis k jusqu'à zéro.

II. La quantité α étant arbitraire, on peut la supposer zéro. Dans ce cas la quantité $\frac{\Delta\varphi x}{\alpha}$ se reduit au coëfficient différentiel $\partial\varphi x$. Donc le théorème que nous venons de trouver fait voir, dans ce cas particulier, que la valeur de $\frac{\varphi(x+k,0)-\varphi(x,k)}{\alpha}$ est toujours plus grande que la plus petite, et plus petite que la plus grande valeur du coëfficient différentiel $\partial\varphi x$, φx étant une fonction continue de x depuis x jusqu'à $x+k$ et depuis k jusqu'à 0. C'est le théorème de Mr. Ampère, qu'il a démontré à l'endroit cité.

21.

Nous allons maintenant appliquer le théorème général du paragraphe précédent à la série générale de Taylor (78.).

I. Mettons dans cette série $k+\alpha$ et $k-\alpha$ au lieu de x et k et déduisons du résultat la série primitive, nous aurons, en désignant le reste de la série suivant (80.) par R_n:

$$0 = F(x+\alpha) - Fx$$
$$+ \frac{k-\alpha}{\alpha} \triangle F(x+\alpha) - \frac{k}{\alpha} \triangle Fx$$
$$+ \frac{(k-\alpha)(k-2\alpha)}{2\alpha^2} \triangle^2 F(x+\alpha) - \frac{k(k-\alpha)}{2\alpha^2} \triangle Fx$$
$$+ \frac{(k-\alpha)(k-2\alpha)(k-3\alpha)}{2.3\alpha^3} \triangle^3 F(x+\alpha) - \frac{k(k-\alpha)(k-2\alpha)}{2.3\alpha^3} \triangle^3 Fx$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$+ \frac{(k-\alpha)(k-2\alpha)\ldots(k-n\alpha)}{2.3\ldots n\alpha^n} \triangle^n F(x+\alpha) - \frac{k(k-\alpha)\ldots k-(n-1)\alpha}{2.3\ldots n\alpha^n} \triangle^n Fx$$
$$+ \triangle R_n$$

ou bien

$$0 = \triangle Fx$$
$$+ \frac{k-\alpha}{\alpha} \triangle F(x+\alpha) - \frac{k-\alpha}{\alpha} \triangle Fx - \triangle Fx$$
$$+ \frac{(k-\alpha)(k-2\alpha)}{2\alpha^2} \triangle^2 F(x+\alpha) - \frac{(k-2\alpha)(k-\alpha)}{2\alpha^2} \triangle^2 Fx - \frac{(k-\alpha)}{\alpha} \triangle^2 Fx$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$+ \frac{(k-\alpha)(k-2\alpha)\ldots(k-n\alpha)}{2.3\ldots n\alpha^n} \triangle^2 F(x+\alpha) - \frac{(k-n\alpha)(k-\alpha)(k-2\alpha)\ldots(k-(n-1)\alpha)}{2.3\ldots n\alpha^n} \triangle^n Fx$$
$$- \frac{(k-\alpha)(k-2\alpha)\ldots(k-(n-1)\alpha)}{2.3\ldots(n-1)\alpha^{n-1}} \triangle^n Fx$$
$$+ \triangle R_n,$$

c'est-à-dire

$$0 = \triangle Fx$$
$$+ \frac{k-\alpha}{\alpha} \triangle^2 Fx - \triangle Fx$$
$$+ \frac{(k-\alpha)(k-2\alpha)}{2\alpha^2} \triangle^3 Fx - \frac{k-\alpha}{\alpha} \triangle^2 Fx$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$+ \frac{(k-\alpha)(k-2\alpha)\ldots(k-n\alpha)}{2.3\ldots n\alpha^n} \triangle^{n+1} Fx - \frac{(k-\alpha)(k-2\alpha)\ldots(k-(n-1)\alpha)\triangle^n Fx}{2.3\ldots(n-1)\alpha^{n-1}}$$
$$+ \triangle R_n.$$

Dans cette équation tous les termes à droite se détruisent, excepté $\triangle R_n$ et la première partie de l'avant dernière ligne; donc elle donne

$$0 = \frac{(k-\alpha)(k-2\alpha)\ldots(k-n\alpha)}{2.3\ldots n\alpha^n} \triangle^{n+1} Fx + \triangle R_n,$$

ou bien

$$105.\quad \triangle R_n = -\frac{(k-\alpha)(k-2\alpha)\ldots(k-n\alpha)}{2.3\ldots n\alpha^n} \triangle^{n+1} Fx.$$

Désignons, pour abréger, par T_0, T_1, T_2, ... les termes de la série (78.), de sorte que

$$106. \quad F(x+k) = T_0 + T_1 + T_2 + T_3 \ldots + T_n + R_n,$$

on a

$$107. \quad T_{n+1} = \frac{k(k-\alpha)(k-2\alpha)\ldots(k-n\alpha)}{2.3\ldots n(n+1)\alpha^{n+1}} \triangle^{n+1} Fx$$

et

$$108. \quad \frac{(k-\alpha)(k-2\alpha)\ldots(k-n\alpha)}{2.3\ldots n\alpha^n} \triangle^{n+1} Fx = \frac{(n+1)\alpha}{k} T_{n+1},$$

donc en vertu de (105.)

$$109. \quad \frac{\triangle R_n}{\alpha} = -\frac{n+1}{k} T_{n+1}.$$

II. Maintenant

$$110. \quad R_n = \frac{k(k-\alpha)(k-2\alpha)\ldots(k-n\alpha)}{2.3\ldots n\alpha^n} \triangle^n \left(\frac{F(x+k)-Fx}{k}\right) \quad (80.)$$

est une fonction de x et k, et le signe $\triangle$ dans son expression veut dire, que x doit être varié de α, et k en même tems de $-\alpha$. $\triangle R_n$ sera une fonction semblable. Donc les quantités R_n et $\triangle R_n$ seront déjà comparables aux fonctions $\varphi(x,k)$ et $\triangle\varphi(x,k)$ (§. 20. I.) en ce qui regarde leur composition. Elles leur seront comparables en tous les points si la fonction R_n a la propriété de n'être ni infini ni imaginaire pour aucune valeur des élémens x et k depuis x jusqu'à $x+k$ et depuis k jusqu'à zéro. Considérons d'abord un nombre fini de termes de la série (78.). Si aucun de ces termes n'est ni infini ni imaginaire ponr aucune valeur des élémens x et k, c'est-à-dire si aucune des différences $\frac{\triangle Fx}{\alpha}$, $\frac{\triangle^2 Fx}{\alpha^2}$ .... $\frac{\triangle^n Fx}{\alpha^n}$, et Fx lui même ne l'est pas, la somme des termes sera dans le même cas; et si encore $F(x+k)$ est réel et fini, le reste R_n sera nécessairement une quantité finie et réelle également. Donc si aucune des quantités Fx, $\frac{\triangle Fx}{\alpha}$, $\frac{\triangle^2 Fx}{\alpha^2}$, ... $\frac{\triangle^n Fx}{\alpha^n}$ dans la série (78.), n étant d'abord supposée un nombre fini, n'est ni infini ni imaginaire, le reste R_n de la série sera une fonction de x et k parfaitement semblable à la fonction $\varphi(x,k)$ (§. 20. I.) et l'on pourra supposer

$$111. \quad R_n = \varphi(x,k).$$

III. Remarquons d'abord qu'en écrivant dans l'expression du reste R_n, $x+k$ au lieu de x, et d'après la condition, 0 au lieu de k, la valeur du reste se réduira à zéro. En effet l'expression (78.) donne

$$112. \quad R_n = \varphi(x,k) = F(x+k) - Fx - \frac{k}{\alpha}\triangle Fx - \frac{k(k-\alpha)}{2\alpha^2}\triangle^2 Fx \ldots$$
$$\ldots - \frac{k(k-\alpha)(k-2\alpha)\ldots(k-(n-1)\alpha)}{2.3\ldots n\alpha^n}\triangle^n Fx$$

et si dans cette équation on fait $x = x+k$ et $k=0$, elle donne

$$113. \quad R_n = \varphi(x+k,0) = F(x+k) - F(x+k) = 0,$$

les valeurs de toutes les quantités $\triangle Fx$, $\triangle^2 Fx$, ... $\triangle^n Fx$ étant supposées finies: donc en composant la quantité $\frac{\varphi(x+k,0)-\varphi(x,k)}{k}$ pour la valeur actuelle R_n de $\varphi(x,k)$ on voit que cette quantité est $= -\frac{\varphi(x,k)}{k}$ $= -\frac{R_n}{k}$.

IV. Mais suivant le théorème (§. 20. I.) la valeur de la quantité $\frac{\varphi(x+k,0)-\varphi(x,k)}{k}$ est toujours comprise entre la plus grande et la plus petite valeur de $\frac{\triangle\varphi(x,k)}{\alpha}$; donc la quantité $\frac{\varphi(x+k,0)-\varphi(x,k)}{k}$ étant $-\frac{\varphi,k}{k}$ dans le cas actuel, le théorème nous apprend que la valeur de $-\frac{R_n}{k}$ est comprise entre la plus grande et la plus petite valeur de $\frac{\triangle\varphi(x,k)}{\alpha} = \frac{\triangle R_n}{\alpha}$, ou bien $\frac{R_n}{k}$ entre la plus grande et la plus petite valeur de $-\frac{\triangle R_n}{\alpha}$.

V. Cette dernière quantité est égale à $\frac{n+1}{k}T_{n+1}$ (109.), donc la valeur de $\frac{R_n}{k}$ est comprise entre la plus grande et la plus petite valeur de $\frac{n+1}{k}T_{n+1}$, ou, ce qui est la même chose, R_n l'est entre la plus grande et la plus petite valeur de $(n+1)T_{n+1}$; T_{n+1} étant le premier terme du reste R_n.

Donc nous venons de trouver le théorème suivant.

Si dans la série générale de Taylor (78.) les valeurs de toutes les quantités $F(x+k)$, Fx, $\triangle Fx$, $\triangle^2 Fx$, ... $\triangle^n Fx$ (n étant supposé

d'abord un nombre fini) sont réelles et finies pour toutes les valeurs des élémens x et k depuis x jusqu'à $x+k$ et depuis k jusqu'à zéro, la valeur du reste R_n de la série, qui suit le n^{me} terme après le premier, est comprise entre la plus grande et la plus petite valeur que son premier terme T_{n+1} peut avoir pour les différentes valeurs des élémens x et k.

VI. Ce théorème suppose que le nombre des termes de la série qui précèdent son reste est fini. Mais on peut faire voir que, sous les conditions établies, le théorème a également lieu pour un nombre infini des termes.

Si les termes de la série vont en augmentant, elle est évidemment divergente et il n'est plus question du reste. Si les termes sont égaux entre eux, et de même signe, le théorème donne des limites infinies pour la valeur du reste, comme il le faut. Si les termes de la série sont de grandeur égale et de signes différents, la série n'exprime aucune quantité déterminée. Il ne reste donc que le cas où la valeur algébrique des termes de la série va en diminuant par termes ou par groupes de termes.

Si dans ce cas le théorème donne des limites finies pour la valeur du reste R_n qui suit un nombre fini de termes, cela fait voir que la valeur de la série dans toute son étendue est finie, car R_n exprime la somme de tous les termes de la série à l'infini, qui suivent le n^{me} après le premier. Donc aussi une partie quelconque de la série, à partir de son premier terme et allant même jusqu'à l'infini, aura une valeur finie, les termes ayant été supposés décroissants, ou par termes ou par groupes, et la partie ne pouvant être plus grande que le tout. La somme des termes qui précèdent le reste de la série aura donc toujours une valeur finie, même si l'on prend un nombre infini de termes. Mais la condition (II.) de l'exactitude du théorème veut que la somme des termes qui précèdent le reste soit finie; donc le théorème a également lieu pour la valeur du reste dans l'infini.

VII. Si la plus grande et la plus petite valeur du premier terme du reste dans l'infini, prises $(n+1)$ fois, sont zéro toutes les deux, le reste de la série, qui suivant le théorème (V.) est compris entre ces deux limites, le sera également. Donc la série sera convergente dans ce cas.

VIII. Puisque la série générale de Taylor (78.) se réduit à la série particulière du même nom (91.) quand on fait $\alpha = 0$ sous condition

qu'aucun coëfficient différentiel ni le reste ne soient infinis (§. 18. V.) et que cette condition s'accorde avec celle de l'exactitude du théorème des limites du reste de la série générale, qu'aucun de ses termes ne doive être infiniment grand: le théorème aura lieu également pour la série particulière de Taylor et

> la valeur du reste de cette série qui suit un nombre quelconque n de ses termes sera toujours comprise entre la plus grande et la plus petite valeur du premier terme du reste, pris $(n+1)$ fois, sous condition qu'aucun coëfficient différentiel ne soit infini ni imaginaire et que la série aille en décroissant. Si ces limites de la valeur du reste sont zéro dans l'infini, la série sera convergente.

22.

Quant à la série générale de Taylor, il y a un cas particulier, où le théorème des limites de la valeur du reste trouvé ci-dessus, ou plutôt la série elle même, n'ont pas lieu si l'on prend à l'infini le reste et la série. C'est celui où toutes les différences ΔFx, $\Delta^2 Fx$, ... sont égales entre elles et à la fonction Fx, et alternativement positives et négatives. Nous verrons plus bas un exemple de ce cas en traitant des facultés analytiques.

Dans le cas d'exception la série (78.) donne

$$114. \quad F(x+k) = Fx\left(1-\frac{k}{\alpha}+\frac{k(k-\alpha)}{2\alpha^2}-\frac{k(k-\alpha)(k-2\alpha)}{2.3.\alpha^3}\ldots.\right)+R_n.$$

Mais on a, comme on le verra plus bas dans le développement des puissances,

$$115. \quad 1-\frac{k}{\alpha}+\frac{k(k-\alpha)}{2\alpha^2}-\frac{k(k-\alpha)(k-2\alpha)}{2.3\alpha^3}\ldots.\infty = (1-1)^{\frac{k}{\alpha}}.$$

et $(1-1)^{\frac{k}{\alpha}}$ est zéro toutes les fois que $\frac{k}{\alpha}>0$; donc l'équation (114.) se réduit à

$$116. \quad F(x+k) = R_n.$$

De sorte que l'évaluation du reste R_n de la série par ses termes cesse d'avoir lieu dans l'infini, puisque la série, si on la continue à l'infini, n'existe plus.

Si l'on vouloit appliquer le théorème des limites du reste R_n au cas actuel, en supposant $n=\infty$, on trouveroit pour limites du reste la plus

grande et la plus petite valeur que la quantité $\frac{k(k-\alpha)(k-2\alpha)\ldots(k-n\alpha)}{2.3\ldots n\,\alpha^{n+1}}Fx$ peut avoir pour toutes les valeurs des élémens x et k depuis x jusqu'à $x+k$ et depuis k jusqu'à zéro. Mais la quantité $\frac{k(k-\alpha)(k-2\alpha)\ldots(k-n\alpha)}{2.3\ldots n\,\alpha^{n+1}}$, comme on le verra plus bas, est zéro pour $n=\infty$ toutes les fois que $\frac{k}{\alpha}$ ou bien $k>0$; donc on trouveroit $R_n=0$ pour $n=\infty$ et la série (114.) donneroit

$$117.\quad F(x+k)=Fx\left(1-\frac{k}{\alpha}+\frac{k(k-\alpha)}{2\alpha^2}\ldots\ldots\right)=(1-1)^{\frac{k}{\alpha}}Fx=0,$$

ce qui est évidemment faux. Mais l'application du théorème des limites du reste de la série n'a pas lieu ici, puisque la série qui précède le reste est zéro pour une valeur quelconque de x, si k est >0, de sorte qu'aucun terme qui pouvait servir à l'évaluation du reste n'existe. On verra encore plus clairement la raison de cette exception dans la démonstration même du théorème des limites (§. 21.). En effet une des conditions de l'exactitude de ce théorème, comme le fait voir (§. 21. III.), est, que $\varphi(x+k,0)$ doit être zéro en supposant $R_n=\varphi(x,k)$. Cette condition cesse d'être satisfaite dans le cas actuel, car ici le reste R_n est la quantité $F(x+k)$ elle même, qui n'est pas zéro en y mettant $x+k$ au lieu de x et 0 au lieu de k, mais plutôt invariablement $F(x+k)$. La conclusion de (§. 21. III) que $\varphi(x+k,0)$ est nul puisque tous les termes qui précèdent le reste se détruisent en mettant 0 au lieu de k et $x+k$ au lieu de x excepté le premier terme qui donne $F(x+k)$, de sorte $F(x+k)=F(x+k)+R_n$ et $R_n=0$, n'a pas non plus lieu ici, puisque la série elle même qui précède le reste est zéro et cesse d'exister.

Il est vrai que la somme de la série (114.) qui précède le reste R_n n'est zéro qu'autant que $\frac{k}{\alpha}>0$ ou bien $k>0$ et non pas dans le cas où $k=0$ et $x=x+k$, qui est un de ceux qui se présentent dans l'évaluation des limites du reste. Dans ce cas on a $(1-1)^0=1$ et l'équation (114.) donne $F(x+k)=F(x+k)+R_n$. Mais cette dernière équation donne $R_n=0$. Donc le reste est nul dans ce cas, et cela s'accorde avec le théorème des limites; d'où l'on voit que ce théorème est loin d'être en défaut, même dans ce cas actuel. Il cesse seulement ici d'être généralement applicable.

La valeur du reste de la série est discontinue dans ce cas. En effet l'équation (114.) donne $R_n = F(x+k)$ pour une valeur quelconque de k plus grande que zéro, et $R_n = 0$ pour $k = 0$.

D'ailleurs il n'y a qu'un seul cas, celui de la nonexistence de la série, ou bien de son indépendance des élémens x et k, où le théorème des limites du reste ne soit pas applicable. Il l'est effectivement dans tout autre cas où les termes de la série qui précèdent le reste dépendent des élémens variables x et k.

L'exception de la règle n'a pas même lieu, si la série de développement n'est pas infinie mais plutôt finie; dans ce cas la somme des termes qui précèdent le reste n'est pas zéro, mais elle dépend de x et k; donc le théorème des limites y est applicable. Si l'on ne prend qu'une partie des termes de la série finie, le reste sera compris entre les limites du théorème. Ces limites se réduisent par elles mêmes à zéro à la fin de la série. L'exception, comme nous l'avons dit, n'a donc lieu que dans le seul cas où les différences ΔFx, $\Delta^2 Fx$, $\Delta^3 Fx$, ... ont des valeurs égales et des signes alternativement différents, et où la série est infinie. Dans ce cas le développement même de la série n'a pas lieu, et par cette raison le théorème des limites n'a lieu non plus ni pour un nombre infini ni pour un nombre fini des termes.

23.

Les limites de la valeur du reste de la série générale de Taylor trouvées (§. 21.) seront ordinairement assez éloignées l'une de l'autre, surtout à cause du coëfficient $n+1$ dans l'expression $(n+1)\,T_{n+1}$, lequel est infiniment grand pour $n = \infty$. Mais il existe des limites beaucoup plus resserrées qu'on trouve comme suit.

I. Nous avons vu plus haut que

$$118. \quad \Delta R_n + \frac{n+1}{k} T_{n+1} = 0 \quad (109.),$$

ou bien

$$119. \quad \Delta R_n + \frac{(k-\alpha)(k-2\alpha)\ldots(k-n\alpha)}{2.3\ldots n\,\alpha^n} \Delta^{n+1} Fx = 0. \quad (105.)$$

Cela donne

$$120. \quad \Delta R_n + \frac{\alpha(k-\alpha)(k-2\alpha)\ldots(k-n\alpha)}{2.3\ldots n} \cdot \frac{\Delta^{n+1} Fx}{\alpha^{n+1}} = 0.$$

Soit M la plus petite et N la plus grande des valeurs que la quantité

$\frac{\Delta^{n+1} Fx}{\alpha^{n+1}}$ peut avoir pour les valeurs différentes de x depuis x jusqu'à $x+h$, de sorte que

$$121. \quad \frac{\Delta^{n+1} Fx}{\alpha^{n+1}} > M < N,$$

l'égalité étant la limite pour la valeur des signes $>$ et $<$ et y comprise, on aura en vertu de (120.)

$$122. \quad \Delta R_n + \frac{\alpha(k-\alpha)(k-2\alpha)\ldots(k-n\alpha)}{2.3\ldots n} M < 0$$

et

$$123. \quad \Delta R_n + \frac{\alpha(k-\alpha)(k-2\alpha)\ldots(k-n\alpha)}{2.3\ldots n} N > 0.$$

II. Mettons $k-\alpha$ au lieu de k dans l'expression $\frac{k(k-\alpha)(k-2\alpha)\ldots(k-n\alpha)}{2.3\ldots(n+1)}$ et déduisons du résultat la quantité primitive, nous aurons

$$\Delta\left(\frac{k(k-\alpha)(k-2\alpha)\ldots(k-n\alpha)}{2.3\ldots(n+1)}\right) = \frac{(k-\alpha)(k-2\alpha)(k-3\alpha)\ldots(k-(n+1)\alpha)}{2.3\ldots(n+1)} - \frac{k(k-\alpha)(k-2\alpha)\ldots(k-n\alpha)}{2.3\ldots(n+1)}$$

$$= \frac{(k-\alpha)(k-2\alpha)\ldots(k-n\alpha)}{2.3\ldots(n+1)}(k-(n+1)\alpha-k)$$

donc

$$124. \quad -\Delta\left(\frac{k(k-\alpha)(k-2\alpha)\ldots(k-n\alpha)}{2.3\ldots(n+1)}\right) = \frac{\alpha(k-\alpha)(k-2\alpha)\ldots(k-n\alpha)}{2.3\ldots n}.$$

La quantité à droite dans cette expression est égale au facteurs de M et N dans (122. et 123.); donc ces dernières expressions peuvent être représentées par

$$125. \quad \Delta R_n - M\Delta\left(\frac{k(k-\alpha)(k-2\alpha)\ldots(k-n\alpha)}{2.3\ldots(n+1)}\right) < 0$$

et

$$126. \quad \Delta R_n - N\Delta\left(\frac{k(k-\alpha)(k-2\alpha)\ldots(k-n\alpha)}{2.3\ldots(n+1)}\right) > 0,$$

ou bien, M et N étant des constantes sur lesquelles le signe Δ n'a point d'effet, par

$$127. \quad \Delta\left[R_n - M\frac{k(k-\alpha)(k-2\alpha)\ldots(k-n\alpha)}{2.3\ldots(n+1)}\right] < 0$$

et

$$128. \quad \Delta\left[R_n - N\frac{k(k-\alpha)(k-2\alpha)\ldots(k-n\alpha)}{2.3\ldots(n+1)}\right] > 0.$$

Dans ces expressions les quantités qui, sous le signe Δ, suivent R_n ne sont autre chose que la plus petite et la plus grande valeur du premier terme

T_{n+1} du reste R_n; car ce terme est suivant (78.)

$$129. \quad T_{n+1} = \frac{k(k-\alpha)(k-2\alpha)\ldots\ldots k-n\alpha)}{2.3\ldots.(n+1)} \cdot \frac{\triangle^{n+1} Fx}{\alpha^{n+1}}$$

et M et N en vertu de (121.) sont la plus petite et la plus grande valeur de $\frac{\triangle^{n+1} Fx}{\alpha^{n+1}}$, donc

$$130. \quad M\frac{k(k-\alpha)(k-2\alpha)\ldots.(k-n\alpha)}{2.3\ldots.(n+1)} \text{ est la plus petite valeur de } T_{n+1} \text{ et}$$

$$131. \quad N\frac{k(k-\alpha)(k-2\alpha)\ldots.(k-n\alpha)}{2.3\ldots.(n+1)} \text{ est la plus grande valeur de } T_{n+1}.$$

III. Cela posé, si, dans la série (78.), les quantités $F(x+k)$ et Fx avec les $n+1$ premiers termes qui suivent Fx, n étant un nombre fini, ne sont ni imaginaires ni infinies, le reste R_n, comme il a été remarqué (§. 21. II.) ne sera également ni imaginaire ni infini; donc les quantités sous le signe $\triangle$ (127. et 128.) composées du reste R_n et de son premier terme T_{n+1} (130. et 131.) seront des fonctions de x et k ni imaginaires ni infinies pour aucune valeur de leurs élémens. Donc ces quantités seront parfaitement semblables à la fonction $\varphi(x,k)$ supposée (§. 20.) et on pourra faire

$$132. \quad R_n - M\frac{k(k-\alpha)(k-2\alpha)\ldots.(k-n\alpha)}{2.3\ldots.(n+1)} = \varphi_1(x,k) \text{ et}$$

$$133. \quad R_n - N\frac{k(k-\alpha)(k-2\alpha)\ldots.(k-n\alpha)}{2.3\ldots.(n+1)} = \varphi_2(x,k).$$

IV. Donc, en vertu de ce qui a été démontré (§. 20.), la valeur de la quantité $\frac{\varphi_1(x+k,0)-\varphi_1(x,k)}{k}$ sera toujours comprise entre la plus petite et la plus grande valeur de $\frac{\triangle\varphi_1(x,k)}{\alpha}$, et la quantité $\frac{\varphi_2(x+k,0)-\varphi_2(x,k)}{k}$ entre la plus petite et la plus grande valeur de $\frac{\triangle\varphi_2(x,k)}{\alpha}$.

Mais nous avons vu (§. 21. III.) que R_n, en y mettant $x+k$ au lieu de x et 0 au lieu de k, se réduit à zéro. Il en est de même des quantités $M\frac{k(k-\alpha)(k-2\alpha)\ldots(k-n\alpha)}{2.3\ldots.(n+1)}$ et $N\frac{k(k-\alpha)(k-2\alpha)\ldots.(k-n\alpha)}{2.3\ldots.(n+1)}$, ces quantités ayant k pour facteur. Donc les quantités $\varphi_1(x,k)$ et $\varphi_2(x,k)$, (132. 133), en y mettant $x+k$ au lieu de x et 0 au lieu de k, se réduisent à zéro, et on a $\varphi_1(x+k,0)=0$ et $\varphi_2(x+k,0)=0$. Par là les

quantités $\frac{\varphi_1(x+k,0)-\varphi_1(x,k)}{k}$ et $\frac{\varphi_2(x+k,0)-\varphi_2(x,k)}{k}$ se réduisent à $-\frac{\varphi_1(x,k)}{k}$ et $-\frac{\varphi_2(x,k)}{k}$. Donc en vertu du théorème (§. 20.), que nous venons de citer, la quantité $-\frac{\varphi_1(x,k)}{k}$ sera comprise entre la plus petite et la plus grande valeur de $\frac{\triangle\varphi_1(x,k)}{\alpha}$ et la quantité $-\frac{\varphi_2(x,k)}{k}$ entre la plus petite et la plus grande valeur de $\frac{\triangle\varphi_2(x,k)}{\alpha}$ ou bien $-\frac{\alpha\varphi_2(x,k)}{k}$ sera comprise entre la plus petite et la plus grande valeur de $\triangle\varphi_1(x,k)$ et $-\frac{\alpha\varphi_2(x,k)}{k}$ entre la plus petite et la plus grande valeur de $\triangle\varphi_2(x,k)$.

V. Mais les quantités $\triangle\varphi_1(x,k)$ et $\triangle\varphi_2(x,k)$, comme le font voir (132. et 133.), ne sont autre chose que celles (127. et 128.). Ces dernières quantités, comme le font voir les expressions (127. et 128.), ont la propriété de n'avoir, la première que des valeurs négatives, et la seconde que des valeurs positives. Donc aussi la plus petite et la plus grande valeur de $\triangle\varphi_1(x,k)$ seront négatives en même tems et la plus petite et la plus grande valeur de $\triangle\varphi_2(x,k)$ positives toutes les deux. En appliquant cette remarque au résultat (IV.) on en tire la conclusion que la quantité $-\frac{\alpha\varphi_1(x,k)}{k}$ sera toujours négative, c'est-à-dire <0 et la quantité $-\frac{\alpha\varphi_2(x,k)}{k}$ toujours positive, c'est-à-dire >0. Donc les quantités $\varphi_1(x,k)$ et $\varphi_2(x,k)$ auront nécessairement des signes différents, c'est-à-dire, si l'une est >0, l'autre sera <0.

Mais ces quantités, comme le font voir les expressions (132. 133.), ne sont autre chose que les différences entre le reste R_n et la plus petite et la plus grande valeur de son premier terme. Donc la valeur du reste est comprise entre la plus petite et la plus grande valeur de son premier terme.

VI. On a supposé jusqu'ici que le nombre des termes qui précèdent le reste est fini (III.), mais en vertu des réflexions (§. 21. VI.) le résultat a lieu encore si même le nombre des termes est infini; donc on a le théorème suivant.

Si dans la série générale de Taylor (78.) les quantités $F(x+k)$ et Fx et tous les termes de la série qui suivent ne sont ni imaginaires ni infinis et vont en diminuant, la valeur du reste R_n qui suit les n

premiers termes après Fx est comprise entre les valeurs de son premier terme $\frac{k(k-\alpha)(k-2\alpha)\ldots(k-n\alpha)}{2.3\ldots(n+1)}.\frac{\triangle^{n+1}Fx}{\alpha^{n+1}}$ correspondantes à la plus grande et à la plus petite valeur que peut avoir la quantité $\frac{\triangle^{n+1}Fx}{\alpha^{n+1}}$ pour les différentes valeurs de x depuis x jusqu'à $x+k$.

On voit que si dans l'infini ces valeurs du premier terme du reste R_n sont zéro toutes les deux, le reste sera zéro également. Donc dans ce cas la série sera convergente. Si les deux valeurs du premier terme du reste dans l'infini ne sont pas nulles mais finies ou infinies et de même signe, la série sera divergente.

VII. Puisque la démonstration de notre théorème a lieu pour une valeur quelconque de x, et même pour $\alpha=0$, qui est le cas de la série particulière de Taylor sous la condition (§. 18. VI.), le théorème s'appliquera également à cette série et il s'énoncera dans ce cas comme suit:

Si dans la série particulière de Taylor (91.) les quantités $F(x+k)$ et Fx et tous les termes de la série qui suivent ne sont ni imaginaires ni infinis et vont en diminuant, la valeur du reste R_n qui suit les n premiers termes après Fx est comprise entre les valeurs de son premier terme $\frac{k^n}{2.3\ldots(n+1)}\partial^{n+1}Fx$ qui correspondent à la plus grande et la plus petite valeur que peut avoir le coëfficient différentiel $\partial^{n+1}Fx$ pour les différentes valeurs de x depuis x jusqu'à $x+k$.

Si dans l'infini ces valeurs du premier terme du reste R_n sont zéro toutes les deux, le reste sera zéro également et la série sera convergente. Si les deux valeurs du premier terme du reste dans l'infini ne sont pas zéro mais finies ou infinies et de même signe, la série sera divergente.

Le théorème général que nous venons de démontrer donne, comme on voit, dans le cas de la série particulière de Taylor le théorème de Lagrange démontré plus simplement par Mr. Ampère à l'endroit cité.

IV. Application des formules générales de développement aux puissances.

24.

Le secours de formules générales de développement est nécessaire pour l'évaluation des valeurs des puissances dans les cas où la multiplication et l'addition ne suffisent pas seules à leur calcul immédiat suivant les formules fondamentales. Mais ce sont toujours les équations fondamentales d'où il faut partir, même en faisant usage des formules de développement.

Nous commencerons par une remarque préliminaire.

Supposons la puissance

$$134. \quad u^y = z:$$

il y aura trois quantités u, y et z, dont chacune dépend des deux autres. Il y aura donc à calculer

$$135. \quad \begin{cases} z \text{ par } u \text{ et } y, \\ y \text{ par } z \text{ et } u, \\ u \text{ par } y \text{ et } z, \end{cases}$$

et puisque chaque élément peut être varié isolément, l'autre étant regardé comme invariable, il y aura les six problèmes suivans:

$$136. \quad \begin{cases} 1. \text{ et } 2. \text{ calculer } z \text{ par } u \text{ et } y \text{ en variant } u \text{ et } y, \\ 3. \text{ et } 4. \text{ calculer } y \text{ par } z \text{ et } u \text{ en variant } z \text{ et } u, \\ 5. \text{ et } 6. \text{ calculer } u \text{ par } y \text{ et } z \text{ en variant } y \text{ et } z. \end{cases}$$

Mais ces six problèmes, comme on le verra, peuvent être réduits à un seul quant au développement, et les resultats des solutions des autres peuvent être trouvés par les équations fondamentales seules sans nouveau développement.

Il sera naturel de choisir pour faire le développement necessaire, le cas où l'effet de la variation de l'élément regardé comme variable devient évident par les équations fondamentales elles mêmes. C'est celui où l'exposant varie. Car la première équation fondamentale (3.) exprime immédiatement la variation d'une puissance produite par celle de l'exposant. En effet, en variant y de k dans u, on a immédiatement, en vertu de la première équation fondamentale, $u^{y+k} = u^y . u^k$. Donc nous partirons de ce cas là, le second des cas (136.).

25.

Supposons donc

$$137. \quad u^y = z = Fy$$

u étant regardé comme invariable et y seul comme variable.

La variation de y étant k, la série générale de Taylor (78.) nous donne ici

$$138. \quad F(y+k) = Fy + \frac{k}{\alpha}\triangle Fy + \frac{k(k-\alpha)}{2\alpha^2}\triangle^2 Fy + \frac{k(k-\alpha)(k-2\alpha)}{2.3\alpha^3}\triangle^3 Fy \ldots$$
$$\ldots + \frac{k(k-\alpha)(k-2\alpha)\ldots(k-(n-1)\alpha)}{2.3\ldots n\alpha^n}\triangle^n Fy + \frac{k(k-\alpha)(k-2\alpha)\ldots(k-n\alpha)}{2.3\ldots n\alpha^n}\triangle^n\left(\frac{F(y+k)-Fy}{k}\right).$$

Le signe $\triangle$ veut dire que dans la quantité devant laquelle il est placé, l'élément variable doit être varié de la quantité α, et qu'après, la quantité primitive doit être déduite du résultat. Donc on a ici $\triangle Fy$ c'est-à-dire $F(y+\alpha)-Fy = u^{y+\alpha}-u^y$. Mais en vertu de la première équation fondamentale des puissances (3.) on a $u^{y+\alpha} = u^y . u^\alpha$, donc $\triangle Fy = u^y . u^\alpha - u^y$ ou bien

$$139. \quad \triangle Fy = u^y(u^\alpha - 1).$$

De là on trouve

$$140. \quad \begin{cases} \triangle^2 Fy = (u^{y+\alpha}-u^y)(u^\alpha-1) = u^y(u^\alpha-1)(u^\alpha-1) = u^y(u^\alpha-1)^2, \\ \triangle^3 Fy = (u^{y+\alpha}-u^y)(u^\alpha-1)^2 = u^y(u^\alpha-1)(u^\alpha-1)^2 = u^y(u^\alpha-1)^3, \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ \triangle^n Fy = (u^{y+\alpha}-u^y)(u^\alpha-1)^{n-1} = u^y(u^\alpha-1)(u^\alpha-1)^{n-1} = u^y(u^\alpha-1)^n; \end{cases}$$

donc en vertu de (138.)

$$141. \quad u^{y+k} = u^y + \frac{k}{\alpha}u^y(u^\alpha-1) + \frac{k(k-\alpha)}{2\alpha^2}u^y(u^\alpha-1)^2 \ldots$$
$$\ldots + \frac{k(k-\alpha)(k-2\alpha)\ldots(k-(n-1)\alpha)}{2.3\ldots n\alpha^n}u^y(u^\alpha-1)^n + \frac{k(k-\alpha)(k-2\alpha)\ldots(k-n\alpha)}{2.3\ldots n\alpha^n}\triangle^n\left(\frac{u^{y+k}-u^y}{k}\right).$$

ou bien, u^{y+k} étant $= u^y . u^k$ (3.),

$$142. \quad u^y u^k = u^y\left[1 + k\left(\frac{u^\alpha-1}{\alpha}\right) + \frac{k(k-\alpha)}{2}\left(\frac{u^\alpha-1}{\alpha}\right)^2 + \frac{k(k-\alpha)(k-2\alpha)}{2.3}\left(\frac{u^\alpha-1}{\alpha}\right)^3 \ldots\right.$$
$$\left.\ldots + \frac{k(k-\alpha)(k-2\alpha)\ldots(k-(n-1)\alpha)}{2.3\ldots n}\left(\frac{u^\alpha-1}{\alpha}\right)^n\right] + \frac{k(k-\alpha)(k-2\alpha)\ldots(k-n\alpha)}{2.3\ldots n\alpha^n}\triangle^n\left(\frac{u^y(u^k-1)}{k}\right).$$

Mettons la série que nous venons de trouver sous la forme suivante, sous laquelle elle est encore identiquement la même chose.

$$143.\quad (u^\alpha)^{\frac{\gamma}{\alpha}}(u^\alpha)^{\frac{k}{\alpha}} = (u^\alpha)^{\frac{\gamma}{\alpha}}\Big[1+\frac{k}{\alpha}(u^\alpha-1)+\frac{1}{2}\frac{k}{\alpha}\Big(\frac{k}{\alpha}-1\Big)(u^\alpha-1)^2+\frac{1}{2.3}\frac{k}{\alpha}\Big(\frac{k}{\alpha}-1\Big)\Big(\frac{k}{\alpha}-2\Big)(u^\alpha-1)^3+\ldots$$
$$\ldots+\frac{1}{2.3\ldots n}\frac{k}{\alpha}\Big(\frac{k}{\alpha}-1\Big)\Big(\frac{k}{\alpha}-2\Big)\ldots\Big(\frac{k}{\alpha}-(n-1)\Big)(u^\alpha-1)^n\Big]$$
$$+\frac{1}{2.3\ldots n}\frac{k}{\alpha}\Big(\frac{k}{\alpha}-1\Big)\Big(\frac{k}{\alpha}-2\Big)\ldots\Big(\frac{k}{\alpha}-n\Big)\triangle^n\Big(\frac{(u^\alpha)^{\frac{\gamma}{\alpha}}((u^\alpha)^{\frac{k}{\alpha}}-1)}{\frac{k}{\alpha}}\Big)$$

et écrivons dans cette série u au lieu de u^α, y au lieu de $\frac{\gamma}{\alpha}$ et k au lieu de $\frac{k}{\alpha}$, nous aurons

$$144.\quad u^\gamma.u^k = u^\gamma\Big[1+k(u-1)+\frac{k(k-1)}{2}(u-1)^2+\frac{k(k-1)(k-2)}{2.3}(u-1)^3+\ldots$$
$$\ldots+\frac{k(k-1)(k-2)\ldots(k-(n-1))}{2.3\ldots n}(u-1)^n\Big]+\frac{k(k-1)(k-2)\ldots(k-n)}{2.3\ldots n}\triangle^n\Big(\frac{u^\gamma(u^k-1)}{k}\Big).$$

La transformation que nous venons de faire est évidemment praticable dans tous les cas où l'on donne une valeur finie à la quantité arbitraire α, mais elle ne l'est pas dans le seul cas où l'on veut que α soit zéro, car cette valeur de α donneroit dans (143.) $u^\alpha = 1$, $\frac{\gamma}{\alpha} = \infty$ et $\frac{k}{\alpha} = \infty$ de sorte que l'expression (143.) seroit indéfinie. Donc l'expression (144.) a lieu pour une valeur quelconque de α, excepté la seule valeur zéro. Donc aussi cette série est absolument aussi générale que celle (142.), excepté le seul cas $\alpha = 0$.

Si l'on fait $y = 0$, on a, y^0 étant $= 1$ (7.)

$$145.\quad u^k = 1+k(u-1)+\frac{k(k-1)}{2}(u-1)^2+\frac{k(k-1)(k-2)}{2.3}(u-1)^3+\ldots$$
$$\ldots+\frac{k(k-1)(k-2)\ldots(k-(n-1))}{2.3\ldots n}(u-1)^n+\frac{k(k-1)(k-2)\ldots(k-n)}{2.3\ldots n}\triangle^n\Big(\frac{u^k-1}{k}\Big)$$

et si l'on suppose

$$146.\quad u = 1+x,$$

$$147.\quad (1+x)^k = 1+kx+\frac{k(k-1)}{2}x^2+\frac{k(k-1)(k-2)}{2.3}x^3+\ldots$$
$$\ldots+\frac{k(k-1)(k-2)\ldots(k-(n-1))}{2.3\ldots n}x^n+\frac{k(k-1)(k-2)\ldots(k-n)}{2.3\ldots n}\triangle\Big(\frac{(1+x)^k-1}{k}\Big)$$

ou bien encore, si pour abréger on veut se servir de la notation des coëfficiens (79.),

148. $$(1+x)^k = 1+k_1x+k_2x^2+k_3x^3....+k_nx^n+(n+1)k_{n+1}\Delta^n\left(\frac{(1+x)^k-1}{k}\right).$$

C'est là la formule connue du binôme, mais dans la plus grande généralité; car les quantités u et k, ou bien x et k, peuvent être tout ce qu'on voudra, réelles ou imaginaires, ou même infinies, le développement de la formule n'étant fondé que sur des transformations identiques qui ont lieu sans aucune condition. En même tems la formule (148.) présente l'expression du reste de la série.

Etant partis immédiatement des équations fondamentales et n'ayant fait que des transformations identiques, la formule du binôme a été trouvée seulement au moyen d'opérations purement élémentaires et d'un seul coup, sans passer successivement des cas particuliers aux cas généraux, comme à l'ordinaire, sans faire aucune supposition hypothétique, comme par. ex. celle de la forme de la série, et sans le secours de l'idée des infiniment-petits ou des limites etc.

Cela est important pour les élémens, et cette première application des formules générales, posées solidement, pourra déjà faire sentir l'effet de cette méthode générale qui est seule, à ce qu'il semble, propre à la nature de l'analyse. On sait combien d'artifices il faut pour le développement ordinaire de la formule du binôme, pour lui donner quelque généralité, et que néanmoins la démonstration n'en ne réussit pas rigoureusement dans tous les cas, par. ex. dans ceux des valeurs imaginaires de la base ou de l'exposant. La méthode générale fait évanouir toutes les difficultés, sans d'autres moyens que les plus élémentaires.

Si l'on n'aimoit pas à mettre les développemens généraux à la tête des élémens, comme cela devroit être effectivement, on pourroit aussi démontrer séparement, et avec une rigueur égale, la formule du binôme, en imitant le développement de la série générale de Taylor pour ce cas particulier. On peut voir cela dans le petit mémoire inseré dans le journal des mathématiques sous le No. 25. tome 4. cahier 3. page 305.

26.

Il s'agit maintenant de la convergence de la série (142.). La recherche en est indispensable, car la série, si elle étoit divergente, ne seroit d'aucune utilité.

I. A la place de la série (142.), si pour le moment on veut laisser de côté le cas $\alpha = 0$, on peut mettre la série (144.) qui, y étant supposé zéro, donne la série du binôme, et qui, comme nous l'avons remarqué ci-dessus, fait fonction de la série générale (142.) dans tous les cas, excepté le seul cas $\alpha = 0$.

Donc la recherche de la convergence de la série générale se réduit d'abord à celle de la convergence de la série (144.), le cas $\alpha = 0$ étant excepté.

II. Supposons réelles toutes les quantités qui entrent dans l'expression (144.). Dans ce cas le théorème de la convergence (§. 23. VI.) y sera applicable.

III. Suivant ce théorème la série sera convergente si ses termes ne sont pas infinis, s'ils vont en décroissant et si du premier terme de son reste R_n savoir du terme

$$149. \quad T_{n+1} = \frac{k(k-1)(k-2)\ldots(k-n)}{2.3\ldots(n+1)} u^y (u-1)^{n+1}$$

les valeurs qui correspondent à la plus grande et à la plus petite valeur que peut avoir la quantité

$$150. \quad \frac{\triangle^{n+1} Fy}{\alpha^{n+1}} = u^y (u-1)^{n+1} \text{ (140.)}$$

pour les valeurs différentes de y depuis y jusqu'à $y+k$, sont zéro toutes les deux pour $n = \infty$.

IV. Mais le facteur u^y, puisqu'il est commun à tous les termes de la série (144.) à droite et à gauche, et puisque par cette raison il n'influe pas sur la convergence de la série, n'entre pas en calcul. Donc la série (144.), le facteur u^y étant mis de côté, se réduit à celle du binôme proprement dite, savoir à

$$151. \quad u^k = 1 + k(u-1) + \frac{k(k-1)}{2}(u-1)^2 + \frac{k(k-1)(k-2)}{2.3}(u-1)^3 \ldots + \frac{k(k-1)(k-2)\ldots(k-(n-1))}{2.3\ldots n}(u-1)^n + R_n$$

ou bien, $1+x$ étant mis à la place de u, à celle ci

152. $(1+x)^k = 1 + kx + \frac{k(k-1)}{2}x^2 + \frac{k(k-1)(k-2)}{2}x^3 \ldots + \frac{k(k-1)(k-2)\ldots(k-(n-1))}{2.3\ldots n}x^n + R_n$

et dans tous les cas où cette série séra convergente, la série (144.) le sera également, et même la série générale (142.) le sera, le seul cas $\alpha = 0$ excepté pour cette dernière.

V. La quantité u^y étant effacée dans les expressions (149. et 150.), elles se réduisent à

153. $T_{n+1} = \frac{k(k-1)(k-2)\ldots(k-n)}{2.3\ldots(n+1)}(u-1)^n = \frac{k(k-1)(k-2)\ldots(k-n)}{2.3\ldots n}x^n$ et

154. $$\frac{\triangle^{n+1} Fy}{\alpha^{n+1}} = (u-1)^{n+1} = x^{n+1}.$$

Puisqu'ici la quantité y, qui est la seule variable, n'entre pas dans (154.), on voit que les conditions de la convergence de la série (151. ou bien 152.) se réduisent à ce que ses termes ne doivent pas être infinis, qu'ils doivent aller en décroissant et que T_{n+1} (153.) doit être zéro pour $n = \infty$.

VI. On voit qu'aucun des n premiers termes de la série (151.), ou de la série (152.), n étant fini, n'est infini, les quantités qui y entrent étant supposées finies. Donc la première des conditions de la convergence est remplie. Mais la seconde condition, que les termes doivent aller en décroissant, au moins vers l'infini, séra satisfaite d'elle même si le terme T_{n+1} est zéro pour $n = \infty$. Donc la recherche de la série (144.) se réduit en dernière analyse à celle de ce terme, et en vertu de ce qui a été dit plus haut, il n'y a qu'à voir si

155. $$T_{n+1} = \frac{k(k-1)(k-2)\ldots(k-n)}{2.3\ldots(n+1)}x^{n+1}$$ (153.)

est zéro pour $n = \infty$, ou non.

VII. Il y a quatre cas. La quantité x peut être ou zéro, ou ± 1; ou > 1, ou entre 0 et 1. Les autres valeurs négatives de x rentrent dans celles-ci, parcequ'il ne s'agit point du signe du terme T_{n+1}.

Premier cas, $x = 0$.

VIII. Dans ce cas la formule (152.) donne $(1+0)^k = 1$ et il n'existe point de série.

Second cas, $x = \pm 1$.

IX. Si dans ce cas $k = -1$, l'expression (155.) donne

$$156. \quad T_{n+1} = \pm \frac{1.2.3....(n+1)}{1.2.3....(n+1)} = \pm 1$$

et on voit que T_{n+1} n'est pas zéro pour $n = \infty$. Donc la série (152.) qui exprime $(1 \pm 1)^{-1}$ est divergente.

X. Si $k < -1$, la valeur absolue de T_{n+1} (155.) est encore plus grande que 1. Donc la série (152.) en exprimant $(1 \pm 1)^{-k}$, k étant > 1, est encore divergente.

XI. Si $k > -1$, nous aurons la valeur de T_{n+1} pour $n = \infty$ en appliquant à l'expression de cette quantité (155.) cette autre en facultés (57.) savoir

$$157. \quad (u,+x)^y = \frac{(1,+1)^y y^{\frac{u}{x}-1}.x}{(1,+1)^{\frac{u}{x}-1}}$$

qui a lieu pour $y = \infty$. En effet en mettant dans le numérateur de T_{n+1}, $u = k$, $x = -1$, $y = n+1$ et dans le dénominateur $u = 1$, $y = n+1$, $k = 1$, on a

$$T_{n+1} = \pm \frac{(1,+1)^{n+1}\,(n+1)^{-k-1}}{(1,+1)^{-k-1}.(n+1)^{n+1}}$$

c'est-à-dire

$$158. \quad T_{n+1} = \frac{1}{(1,+1)^{-k-1}\,(n+1)^{k+1}}$$

et cela donne $T_{n+1} = 0$ pour $n = \infty$, k étant supposé > -1 ou bien $k+1 > 0$.

D'après cela la série (152.) seroit toujours convergente si $x = \pm 1$ et $k > -1$: mais il y a ici à excepter le cas de $(1-1)^k$, si k est > -1 et < 0. Car dans ce cas l'autre condition de la convergence de la série, qu'aucun terme ne doit être infini, n'est pas satisfaite, puisque dans ce cas $(1-1)^k$ est infini lui même. Donc l'expression de $(1-1)^k$ par la série (152.) n'est convergente que dans le cas où $k > 0$; celle de $(1-1)^k$ l'est toujours, k étant > -1.

XII. Il y a encore les cas $k = 0$. Dans ce cas la série (152.) donne $(1+x)^k = 1$. Donc on a $(1 \pm 1)^0 = 1$.

Troisieme cas, $x > 1$.

XIII. Supposons $x = 1 + z$, on a en vertu de (152.)

159. $x^{n+1}=(1+z)^{n+1}=1+(n+1)z+\frac{(n+1)n}{2}z^2+\frac{(n+1)n(n-1)}{2.3}z^3....\frac{(n+1)n(n-1)....1}{2.3....(n+1)}z^{n+1}.$

Cette série, n étant un nombre entier, finit par le terme $\frac{(n+1)n(n-1)....1}{2.3....(n+1)}z^n$, car les coëfficiens de tous les termes suivans ont $n-n=0$ pour facteur et sont zéro par cette raison, de sorte que la série donne la valeur complète de $(1+z)^{n+1}=x^{n+1}$. Mais tous les termes de la série (159.) sont positifs, z ayant été supposé positif; donc la somme de la série est plus grande que chacun de ses termes. Elle est donc par ex. plus grande que le terme

160. $\frac{(n+1)n(n-1)....(n-(m-1))}{2.3....m}z^m.$

Mais ce terme, m étant supposé un nombre fini, est évidement ∞, si l'on suppose $n=\infty$. Donc le second facteur de T_{n+1} savoir $(1+z)^{n+1}$, ou bien x^{n+1}, est une quantite infinie si $x>1$ et $n=\infty$.

XIV. Cela posé, soit en premier lieu $k=-1$ ou $k<-1$, nous avons vu (IX. et X.) que dans ce cas le premier facteur $\frac{k(k-1)(k-2)....(k-n)}{2.3....(n+1)}$ de T_{n+1} (155.) n'est pas nul; donc T_{n+1} dans le cas actuel n'est pas zéro pour $n=\infty$, mais au contraire infini. Donc la série (152.) est divergente si $x>1$ et $k=$ ou <-1.

XV. Soit en second lieu $k>-1$.

En appliquant à l'expression de T_{n+1} (155.) celle (157.) on a

161. $T_{n+1}=\frac{x^{n+1}}{(1,+1)^{-k-1}(n+1)^{k+1}},$

comme le fait voir (158.). Mais x^{n+1} ou bien $(1+z)^{n+1}$, comme on l'a vu ci-dessus (XIII.) est plus grand que $\frac{(n+1)n(n-1)....(n-(m-1))}{2.3....m}z^m$ (160.), donc

162. $T_{n+1}>\frac{z^m}{2.3....m(1,+1)^{-k-1}}.\frac{(n+1)n(n-1)....(n-(m-1))}{(n+1)^{k+1}}.$

Ici le nombre m est fini. Mais il peut être supposé toujours plus grand que $k+1$ et les facteurs $n+1$, n, $n-1$, ... $n-(m-1)$ peuvent être jugés égaux entre eux si $n=\infty$. Donc on a $T_{n+1}>0$ et même ∞ pour $n=\infty$.

Donc la série (152.) x étant >1, est divergente dans le cas $k>-1$. Donc elle est toujours divergente si $x>1$.

XVI. Il faut cependant excepter le cas $k=0$. Dans ce cas on a toujours $(1+x)^0=1$.

Quatrième cas, $x<1$ et >0.

XVII. On peut supposer dans ce cas $x=\frac{1}{1+z}$, de sorte que $x^{n+1}=\frac{1}{(1+z)^{n+1}}$ où z est positif. Puisque $(1+z)^{n+1}$ est infini pour $n=\infty$ (XIII.), le facteur x^{n+1} de (155.) sera zéro dans le cas actuel pour $n=\infty$.

XVIII. Soit en premier lieu $k>-1$, l'autre facteur $\frac{k(k-1)(k-2)\ldots(k-n)}{2.3\ldots(n+1)}$ de (155.), comme nous l'avons vu ci-dessus (XI.), est également zéro pour $n=\infty$, donc T_{n+1} est zéro si $k>-1$, et la série (152.) est convergente dans ce cas.

XIX. Dans le cas $k=0$ on a toujours $(1+x)^0=1$.

XX. Soit en second lieu $k=-1$ ou <-1. Supposons $k=-1-\varepsilon$, ε étant positif et au moins zéro. Substituant $x=1+z$ et $k=-1-\varepsilon$ dans (155.) on a

$$163.\quad T_n=\pm\frac{1+\varepsilon}{1+z}\cdot\frac{2+\varepsilon}{2+2z}\cdot\frac{3+\varepsilon}{3+3z}\cdots\frac{m+\varepsilon}{m+mz}\cdot\frac{m+1+\varepsilon}{m+1+(m+1)z}\cdots$$

Ici le facteur $\frac{m+\varepsilon}{m+mz}$, m étant assez considérable, sera <1 quels que soient ε et z, puisque mz pourra toujours surpasser ε. Les facteurs qui suivent $\frac{m+\varepsilon}{m+mz}$ seront encore plus petits et iront toujours en diminuant. Mais d'après la remarque (XIII.) un produit d'un nombre infini de facteurs, chacun moindre que l'unité, est déjà zéro. Donc le produit (163.) où les facteurs sont <1 et vont en diminuant le sera à plus forte raison, si $n=\infty$. Donc T_{n+1} sera également zéro dans le cas actuel et la série (152.) sera convergente.

Elle sera donc toujours convergente dans le quatrième cas.

XXI. En nous résumant, nous pourrons énoncer comme suit ce que nous venons de trouver sur la convergence de la série du binôme

$$164.\quad (1+x)^k=1+kx+\frac{k(k-1)}{2}x^2+\frac{k(k-1)(k-2)}{2.3}x^3\ldots+\frac{k(k-1)(k-2)\ldots(k-(n-1))}{2.3\ldots n}x^n+R_n.$$

Cette série, x étant réel, est convergente pour une valeur finie et réelle quelconque de l'exposant k si $x>-1$ et $<+1$. Si $x=-1$ elle est convergente si $k>0$, et si $x=+1$, elle l'est si $k>-1$. Si $k=0$, on a $(1+x)^k=1$ pour une valeur quelconque de x. La série est divergente pour toute autre valeur réelle de x et k.

XXII. La recherche de la convergence de la série du binôme présentée dans le paragraphe présent est celle qui a été annoncée dans le petit mémoire cité au commencement de la note préliminaire du mémoire présent, car, comme on l'a vu, nous avons opéré immédiatement sur l'expression générale du reste de la série. Cette recherche est celle qui étoit destinée à être exclusivement l'objet de ce mémoire et qui l'à occasionné.

On peut voir d'ailleurs par la recherche du paragraphe présent et par celle du mémoire cité, combien la théorie ordinaire du binôme, quoique objet très élémentaire et traité souvent, est incomplète. Même on trouve presenté le théorème du binôme sans la moindre notice sur la convergence de la série qui elle même n'est pas démontrée rigoureusement pour une valeur quelconque de l'exposant, et pourtant la série n'est bonne à rien dans les cas où elle n'est pas convergente.

27.

Nous avons vu (§. 25.) que la série (144.) embrasse de l'expression générale d'une puissance développée en série (142.) tous les cas que présentent les différentes valeurs de la quantité arbitraire α, excepté le seul cas $\alpha = 0$. Mais, comme il est aisé de voir, on tire également la série (144.) de celle (142.) en supposant $\alpha = 1$. Donc tous les cas de l'expression (142.) auxquels donnent lieu les différentes valeurs de α, peuvent être envisagés comme réduits à deux seulement, savoir au cas $\alpha = 1$ et au cas $\alpha = 0$. Le premier embrasse tous les cas correspondants aux différentes valeurs finies quelconques de α. Le second cas subsiste isolément. Nous avons fait dans le paragraphe précédent la recherche de la convergence de la série générale (142.) dans le premier cas, où elle se réduit à la série (144.) et donne la formule du binôme. Il nous reste donc à faire cette recherche pour le cas $\alpha = 0$. Dans ce cas la série générale (142.) nous donnera les quantités dites exponentielles et les logarithmes. Nous commencerons par le développement même d'une puissance en série, sous condition que la quantité arbitraire α du développement général des fonctions doit être supposée zéro.

I. Comme la série particulière de Taylor (91.) est consacrée essentiellement au cas où dans la série générale de Taylor (78.) la quantité α est zéro, nous partirons de cette série particulière. En effet,

dans le développement général de la série (91.) on a eu déjà égard aux conditions particulières de son existence; et si, dans un cas d'application, au lieu de partir de la série particulière de Taylor (91.) on vouloit partir de la série générale (78.), il faudroit qu'on répétât dans le développement particulier ce qu'on a fait dans le developpement général. Or par cette raison il vaut mieux de se servir de la série particulière (78.) dans les cas semblables au cas actuel. Cette série, quoique n'étant qu'un cas particulier de la série générale (78.), est particulièrement propre aux cas où dans la série générale (78.) la quantité arbitraire α doit être supposée zéro.

II. Dans la série particulière de Taylor (91.) les quantités $\frac{\triangle Fy}{\alpha}$, $\frac{\triangle^2 Fy}{\alpha^2}$, $\frac{\triangle^3 Fy}{\alpha^3}$, ... de la série générale se réduisent aux coëfficients différentiels ∂Fy, $\partial^2 Fy$, $\partial^3 Fy$, ...

Dans le cas actuel d'une puissance u^y, on a

$$\frac{\triangle Fy}{\alpha} = u^y\left(\frac{u^\alpha - 1}{\alpha}\right),\quad \frac{\triangle^2 Fy}{\alpha^2} = u^y\left(\frac{u^\alpha - 1}{\alpha}\right)^2,\quad \frac{\triangle^3 Fy}{\alpha^3} = u^y\left(\frac{u^\alpha - 1}{\alpha}\right)^3,\ \ldots. \quad (139.\ 140.)$$

donc on a ici:

165.
$$\left\{\begin{array}{l} \partial Fy = u^y\left(\frac{u^\alpha - 1}{\alpha}\right) \\ \partial^2 Fy = u^y\left(\frac{u^\alpha - 1}{\alpha}\right)^2 \\ \partial^3 Fy = u^y\left(\frac{u^\alpha - 1}{\alpha}\right)^3 \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \partial^n Fy = u^y\left(\frac{u^\alpha - 1}{\alpha}\right)^n \end{array}\right\}\ \alpha \text{ étant supposé partout égal à zéro.}$$

Ces expressions de ∂Fy, $\partial^2 Fy$, ... étant substituées dans la série particulière de Taylor (91.) elle nous donnera dans le cas actuel des puissances:

166.
$$u^{y+k} = u^y + k\left(\frac{u^\alpha - 1}{\alpha}\right)u^y + \frac{k^2}{2}\left(\frac{u^\alpha - 1}{\alpha}\right)^2 u^y + \frac{k^3}{2.3}\left(\frac{u^\alpha - 1}{\alpha}\right)^3 u^y \ldots.$$
$$\ldots. + \frac{k^n}{2.3\ldots.n}\left(\frac{u^\alpha - 1}{\alpha}\right)^n u^y + \frac{k^{n+1}}{2.3\ldots.n}\,\partial^n\left(\frac{u^y(u^k - 1)}{k}\right)$$

α étant supposé zéro. Cette série, suivant les conditions de l'existence de la série particulière de Taylor (91.) aura lieu, si aucun des coëfficients différentiels ∂Fy, $\partial^2 Fy$, ... (165.) n'est infini.

III. Dans l'expression du coëfficient différentiel

$$167. \quad \partial^n Fy = u^y \left(\frac{u^\alpha - 1}{\alpha}\right)^n$$

qui répresente tous les autres, le facteur u^y n'est pas infini si les quantités u et y ne le sont pas. Il ne s'agit donc que de la valeur de l'autre facteur $\left(\frac{u^\alpha - 1}{\alpha}\right)^n$ pour $\alpha = 0$ et $n = \infty$.

IV. En vertu de (147.) on a

$$168. \quad (1+x)^k = 1 + kx + \frac{k(k-1)}{2}x^2 + \frac{k(k-1)(k-2)}{2.3}x^3 \ldots + \frac{k(k-1)\ldots(k-(n-1))}{2.3\ldots n}x^n \ldots \infty.$$

De là on tire, k étant facteur commun de tous les termes à droite depuis celui kx jusqu'à l'infini

$$169. \quad \frac{(1+x)^k - 1}{k} = x + \frac{k-1}{2}x^2 + \frac{(k-1)(k-2)}{2.3}x^3 + \frac{(k-1)(k-2)(k-3)}{2.3.4}x^4 \ldots .$$
$$\ldots + \frac{(k-1)(k-2)\ldots(k-(n-1))}{2.3\ldots n}x^n \ldots \infty.$$

et en faisant $k = 0$,

$$170. \quad \frac{(1+x)^0 - 1}{0} = x - \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{3}x^3 - \tfrac{1}{4}x^4 + \tfrac{1}{5}x^5 \ldots \pm \frac{1}{n}x^n \ldots \infty.$$

Cette équation peut être présentée sous les deux formes suivantes

$$171. \quad \frac{(1+x)^0 - 1}{0} = \frac{x}{2}(2-x) + \frac{x^3}{3.4}(4-3x) + \frac{x^5}{5.6}(6-5x) \ldots + \frac{x^n}{n(n+1)}(n+1-nx) \ldots \infty \text{ et}$$

$$172. \quad \frac{(1+x)^0 - 1}{0} = x - \frac{x^2}{2.3}(3-2x) - \frac{x^4}{4.5}(5-4x) - \frac{x^6}{6.7}(7-6x) \ldots - \frac{x^{n-1}}{(n-1)n}(n-(n-1)x) \ldots \infty.$$

Si dans ces expressions x est réel et >0 et <1 tous les termes à droite dans la première expression seront positifs et tous les termes à droite de la seconde, excepté le premier terme x, seront négatifs. Donc la valeur de $\frac{(1+x)^0 - 1}{0}$ sera necessairement >0 et $<x$, c'est-à-dire >0 et <1, x étant supposé <1. Donc, u étant mis au lieu de $1+x$, on trouve que la valeur de $\frac{u^0 - 1}{0}$ est >0 et <1, si u est >1 et <2.

Mais la $n^{ième}$ puissance d'une quantité comprise entre 0 et 1, et qui pour cela peut être représentée par $\frac{1}{1+z}$, où z est >0, est, suivant ce qui a été demontré (§. 26. XIII. et XVI.) $= 0$ pour $n = \infty$. Donc on a ici

$$173. \quad \left(\frac{u^0 - 1}{0}\right)^n = 0 \text{ pour } n = \infty, \text{ } u \text{ étant } > 1 \text{ et } < 2.$$

V. Nous venons donc de trouver que des deux facteurs u^y et $\left(\frac{u^\alpha-1}{\alpha}\right)^n$ du coëfficient différentiel $\partial^n Fy$ **(167.)** le premier u^y n'est pas infini et l'autre $\left(\frac{u^\alpha-1}{\alpha}\right)^n$, u étant >1 et <2, ne l'est pas non plus pour $\alpha=0$ et pour aucune valeur de n, mais au contraire qu'il est zéro pour $n=\infty$. Donc les conditions de l'existence de la série **(166.)** seront satisfaites et la série aura lieu d'abord pour toutes le valeurs de u entre 1 et 2 et pour une valeur quelconque de k.

VI. Mais on peut faire voir que la série **(166.)** aura lieu également pour une valeur quelconque réelle et positive de u. En effet la série **(166.)** ayant lieu pour une valeur quelconque de k, on peut écrire mk au lieu de k et my au lieu de y où m est tout ce qu'on voudra. La série subsistera encore et on aura

$$\textbf{174.}\quad u^{my+mk}=u^{my}+mk\left(\frac{u^0-1}{0}\right)u^{my}+\frac{m^2k^2}{2}\left(\frac{u^0-1}{0}\right)^2u^{my}\ldots.$$
$$\frac{m^nk^n}{2.3\ldots.n}\left(\frac{u^0-1}{0}\right)^n u^{my}+\frac{m^{n+1}k^{n+1}}{2.3\ldots.n}\partial^n\left(\frac{u^{my}(u^{mk}-1)}{mk}\right),$$

u étant toujours entre 1 et 2. Cela posé, mettons également mk au lieu de k dans la série **(145.)** qui a lieu sans aucune condition, elle nous donnera, u^{mk} étant $=(u^m)^k$

$$\textbf{175.}\quad (u^m)^k=1+mk(u-1)+\frac{mk(mk-1)}{2}(u-1)^2\ldots.+\frac{mk(mk-1)(mk-2)\ldots.(mk-(n-1))}{2.3\ldots.n}(u-1)^n\ldots..$$

De là on tire

$$\frac{(u^m)^k-1}{k}=m\left[(u-1)+\frac{mk-1}{2}(u-1)^2+\frac{(mk-1)(mk-2)}{2.3}(u-1)^3\ldots.+\frac{(mk-1)(mk-2)\ldots.(mk-(n-1))}{2.3\ldots.n}(u-1)^n\ldots.\right],$$

et si l'on fait $k=0$,

$$\textbf{176.}\quad \frac{(u^m)^0-1}{0}=m\left[(u-1)-\tfrac{1}{2}(u-1)^2+\tfrac{1}{3}(u-1)^3\ldots.\pm\frac{1}{n}(u-1)^n\ldots.\right].$$

Mais la série **(145.)** elle même donne

$$\frac{u^k-1}{k}=(u-1)+\frac{k-1}{2}(u-1)^2+\frac{(k-1)(k-2)}{2.3}(u-1)^3\ldots.+\frac{(k-1)(k-2)\ldots.(k-(n-1))}{2.3\ldots.n}(u-1)^n\ldots..$$

et pour $k=0$

$$\textbf{177.}\quad \frac{u^0-1}{0}=(u-1)-\tfrac{1}{2}(u-1)^2+\tfrac{1}{3}(u-1)^3\ldots.\pm\frac{1}{n}(u-1)^n\ldots.$$

donc on a en vertu des deux expressions (176. et 177.)

$$178. \quad \frac{(u^m)^0-1}{0} = m \cdot \frac{u^0-1}{0}.$$

On pourra donc mettre dans la série (174.), qui a lieu indubitablement, $\frac{(u^m)^0-1}{0}$ au lieu de $m \cdot \frac{u^0-1}{0}$, et cela donne

$$179. \quad u^{my+mk} = u^{my} + k\frac{(u^m)^0-1}{0}u^{my} + \frac{k^2}{2}\left(\frac{(u^m)^0-1}{0}\right)^2 u^{my} \ldots + \frac{k^n}{2.3\ldots n}\left(\frac{(u^m)^0-1}{0}\right)^n u^{my} \ldots$$

Mais u étant >1 et <2 et m arbitraire, la puissance u^m peut avoir toute valeur réelle et positive qu'on voudra; donc en écrivant simplement u au lieu de u^m dans (179.), on aura

$$180. \quad u^{y+k} = u^y + k\left(\frac{u^0-1}{0}\right)u^y + \frac{k^2}{2}\left(\frac{u^0-1}{0}\right)^2 u^y \ldots + \frac{k^n}{2.3\ldots n}\left(\frac{u^0-1}{0}\right)^n u^y \ldots$$

où maintenant u a une valeur quelconque réelle et positive. Donc la série (166.) a lieu pour une valeur quelconque réelle et positive de u, pour une valeur quelconque réelle de y et pour une valeur quelconque réelle ou imaginaire de k.

28.

Ayant trouvé les conditions de l'existence de la série (166. ou 180.) il s'agit maintenant de sa convergence.

I. Si l'on veut supposer réelles toutes les quantités qui entrent dans la serie, le théorème de la convergence (§. 23. VI.) y sera applicable.

II. Suivant ce théorème la série sera convergente si ses termes ne sont pas infinis, s'ils vont en décroissant et si du premier terme de son reste R_n savoir du terme

$$181. \quad T_{n+1} = \frac{k^{n+1}}{2.3\ldots.(n+1)}u^y\left(\frac{u^0-1}{0}\right)^{n+1}$$

les valeurs qui correspondent à la plus grande et à la plus petite valeur que peut avoir la quantité

$$182. \quad \partial^n Fy = u^y\left(\frac{u^0-1}{0}\right)^{n+1}$$

pour les valeurs différentes de y depuis y jusqu'à $y+k$ sont zéro toutes les deux pour $n=\infty$.

III. Mais le facteur u^y, puisqu'il est commun à tous les termes de la série (180.) à droite et à gauche, et puisque par cette raison il n'influe pas sur la convergence de la série, n'entre pas en calcul. Donc la série (180.), le facteur u^y ayant été supprimé, se réduit à

$$183. \quad u^k = 1 + k\left(\frac{u^0-1}{0}\right) + \frac{k^2}{2}\left(\frac{u^0-1}{0}\right)^2 \ldots + \frac{k^n}{2.3\ldots n}\left(\frac{u^0-1}{0}\right)^n \ldots$$

et dans tous les cas où cette série est convergente, la série (180.) le sera également.

IV. La quantité u^y étant effacée dans les expressions (181. et 182.) elles se réduisent à

$$184. \quad T_{n+1} = \frac{k^{n+1}}{2.3\ldots(n+1)}\left(\frac{u^0-1}{0}\right)^{n+1} \text{ et}$$

$$185. \quad \partial^n Fy = \left(\frac{u^0-1}{0}\right)^{n+1}.$$

Mais puisque la quantité y, qui est la seule variable, n'entre plus dans (185.), on voit que les conditions de la série (183. ou bien 180.) se réduisent à ce que ses termes ne doivent pas être infinis, qu'ils doivent aller en décroissant et que T_{n+1} (184.) doit être zéro pour $n = \infty$.

V. On voit qu'aucun des n premiers termes de la série (183. ou 180.), n étant fini, n'est pas infini; les quantités qui y entrent, savoir u et k, étant supposées finies, car nous avons trouvé que $\frac{u^0-1}{0}$ est entre 0 et 1, si u est entre 1 et 2, et $= m\frac{u^0-1}{0}$ pour une valeur quelconque positive u^m de u. Donc la première des conditions de la convergence de la série est satisfaite. Mais la seconde condition, que les termes doivent aller en décroissant, au moins vers l'infini, sera satisfaite d'elle même si le terme T_{n+1} est zéro pour $n = \infty$. Donc la recherche de la série (183. ou bien 180.) se réduit en dernière analyse à celle de ce terme, et il n'y a qu'à voir si T_{n+1} (184.) est zéro pour $n = \infty$ ou non.

VI. Comme $\frac{u^0-1}{0}$ est toujours une quantité finie, on peut supposer

$$186. \quad k \cdot \frac{u^0-1}{0} = \lambda$$

où λ est fini. Par cela l'expression (184.) se réduit à

$$187. \quad T_{n+1} = \frac{\lambda^{n+1}}{2.3....(n+1)}$$

et il ne s'agit que de voir si la valeur absolue de cette quantité est zéro ou non pour $n = \infty$, λ étant une quantité finie quelconque.

VII. Supposons la valeur absolue de λ plus grande que le nombre entier μ et plus petite que $\mu + 1$. Puis mettons T_{n+1} dans la forme

$$188. \quad T_{n+1} = \frac{\lambda}{2.3....\mu} \cdot \frac{\lambda}{\mu+1} \cdot \frac{\lambda}{\mu+2} \cdot \frac{\lambda}{\mu+3} \cdot \cdots \cdot \frac{\lambda}{n+1}.$$

On voit que dans cette expression le premier facteur $\frac{\lambda^{\mu}}{2.3....\mu}$ est toujours une quantité finie. Le second facteur $\frac{\lambda}{\mu+1}$, λ ayant été supposé plus petit que $\mu + 1$, est < 1. Les autres facteurs qui suivent sont encore plus petits. Donc T_{n+1} n'est pas plus grand que $\frac{\lambda^{\mu}}{2.3....\mu} \cdot \left(\frac{\lambda}{\mu+1}\right)^{n+1-\mu}$. Mais $\frac{\lambda}{\mu+1}$ étant < 1, cette quantité peut être supposée $= \frac{1}{1+z}$, où z est positif; donc T_{n+1} n'est pas plus grand que $\frac{\lambda^{\mu}}{2.3....\mu} \cdot \frac{1}{(1+z)^{n+1-\mu}}$. Mais en vertu de ce qui a été démontré (§. 26. XIV et XVII.) $\frac{1}{(1+z)^{n+1-\mu}}$ est zéro pour $n = \infty$. Donc aussi T_{n+1}, le facteur $\frac{\lambda^{\mu}}{2.3....\mu}$ de cette quantité étant fini, n'est pas plus grand que zéro pour $n = \infty$. C'est-à-dire T_{n+1} est zéro pour $n = \infty$, λ, ou bien k et u, ayant des valeurs quelconques.

Donc la série (183.) ou bien celle (180.) est convergente dans tous les cas où y et k ont des valeurs réelles quelconques et u une valeur réelle positive quelconque.

29.

Voyons ce que nous donne d'ailleurs la série (183.) dont nous venons d'examiner l'existence et la convergence.

I. Nous avons vu (§. 27. IV.) que si u est entre 1 et 2, la quantité $\frac{u^0 - 1}{0}$ est entre 0 et 1, et (§. 27. VI. 178.) que $\frac{(u^m)^0 - 1}{0} = m\frac{u^0 - 1}{0}$, où m peut être tout ce qu'on voudra. De là on voit qu'en donnant à m une valeur convenable, on peut faire $m.\frac{u^0 - 1}{0} = 1$. Donc aussi $\frac{(u^m)^0 - 1}{0}$ peut être $= 1$ pour une valeur convenable de u^m, ou bien de u, en écrivant simplement u au lieu de u^m. Soit e la valeur encore inconnue de u pour

laquelle $\frac{u^0-1}{0}=1$, la série (183.) donne dans ce cas

$$189. \quad e^k = 1+k+\frac{k^2}{2}+\frac{k^3}{2.3}+\frac{k^4}{2.3.4}\ldots+\frac{k^n}{2.3\ldots n}\ldots$$

Par cette série même on trouve sur le champ la valeur de e si l'on fait $k=1$, savoir

$$190. \quad e = 1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2.3}+\frac{1}{2.3.4}\ldots = 2{,}7182818285\ldots$$

C'est la valeur de u pour laquelle $\frac{u^0-1}{0}=1$, de sorte que

$$191. \quad \frac{e^0-1}{0}=1.$$

II. Maintenant une puissance quelconque u^y peut être exprimée également par toute autre racine v, si on lui donne un exposant convenable. En effet, soit $v^m=u$, on a

$$192. \quad z = u^y = v^{my}$$

et si au lieu de v on met la quantité e (190.) et $e^\mu=u$, on a

$$193. \quad z = u^y = e^{\mu y}.$$

Si l'on donne une valeur déterminée à la racine d'une puissance, de sorte que l'exposant seul suffise pour exprimer la valeur de la puissance, on donne le nom de logarithme à l'exposant et celui de base à la racine. C'est la seule différence dans le sens des mots exposant et logarithme. La puissance elle même s'appelle aussi logarithmande. Si la base u est toujours la même pour une suite quelconque de logarithmandes, cette suite présente un système logarithmique, et la racine commune aux puissances en est la base. Dans l'expression (192.) y est le logarithme du logarithmande z ayant u pour base, et en même tems my est le logarithme du même logarithmande z ayant v pour base. Si les logarithmes d'un système quelconque ont la quantité e (190.) pour base, c'est-à-dire la valeur de u qui donne $\frac{u^0-1}{1}=1$, on les appelle naturels ou hyperboliques. Les logarithmes sont ceux de Briggs, si leur base est le nombre 10. On voit que cela ne diffère pas de ce qui est en usage. Mais même par cette raison il étoit nécessaire de l'énoncer, vu les différences qu'offre ce petite mémoire dans les autres parties.

IV. Quant à la notation des logarithmes, on les désigne ordinairement par leur nom abrégé log. Mais cette notation est évidemment incomplète et vague toutes les fois que la base n'est pas déterminée une fois pour toutes, de sorte qu'elle ne varie pas dans tout le cours du calcul. Comme le terme logarithme ne désigne pas parfaitement la quantité qu'on a en vue sans l'enoncé de la base, parcequ'un nombre infini de logarithmes d'un même nombre est possible suivant les valeurs différentes de la base, il est indispensablement nécessaire d'énoncer encore la valeur de la base supposée. Cela pourra se faire commodément et convenablement en mettant le signe de la base au dessus du mot log. par exemple en écrivant dans le cas (192.).

$$194. \quad y = \overset{u}{\log} z, \quad my = \overset{t}{\log} z.$$

On peut même fort bien supprimer le terme log et mettre seulement la base du côté gauche du logarithmande et un peu plus haut, par ex. comme suit

$$195. \quad y = {}^{u}z, \quad my = {}^{v}z$$

car cette dernière notation n'est guères consacrée à un autre objet et elle n'est pour ainsi dire qu'une abréviation de celle (194.). Je me sers ordinairement de cette notation abrégée (195.); mais pour me rapprocher de l'usage ordinaire autant que l'objet paraît le permettre, je conserverai ici la notation (194.). Il est vrai que celle-ci n'est pas généralement en usage non plus: ordinairement on n'écrit que le mot log. et dans les cas où l'obscurité devient trop grande, on énonce additionnellement la base en mots. Mais cela n'est pas bien fait. Il est vrai qu'enfin il est possible d'énoncer toute une formule algébrique par des mots au lieu de signes. Mais le signes valent mieux, et comme on sait, même une partie considérable de la force de l'analyse lui est donnée par l'emploi de signes, moyen extrêmement propre et efficace de combiner les conclusions et les théorèmes, dont la composition au moyen de mots seuls, sans le secours de signes, ne seroit guère possible. Dans les cas où il ne s'agit que d'une seule et même base, on peut sans doute se dispenser de l'écrire, comme, par ex. et par comparaison, il n'est pas besoin dans un calcul analytique où n'entre qu'une seule variable, d'écrire cette variable dans les coëfficiens différentiels. Dans ces cas la notation ordinaire suffit. Mais si plusieurs bases entrent dans le calcul des logarithmes, il est nécessaire de les

énoncer, et cela se fait plus convenablement au moyen des signes qu'au moyen des mots.

V. Si $z = u^y = v^{my}$ on tire des équations (194.)

$$196. \quad \overset{v}{\log} z = m \overset{u}{\log} z$$

et dans le cas $v = e$ et $m = \mu$, c'est-à-dire dans le cas $z = u^y = e^{\mu y}$ (193.)

$$197. \quad \overset{e}{\log} z = \mu \overset{u}{\log} z.$$

Puisque $\overset{u}{\log} z$ exprime l'exposant y même dans $u^y = z$, on a dans le cas $y = 1$, c'est-à-dire $z = u$,

$$198. \quad \overset{u}{\log} u = 1$$

donc en vertu de (196. et 197.)

$$199. \quad \overset{v}{\log} u = m \quad \text{et} \quad \overset{e}{\log} u = \mu.$$

Cela, étant substitué dans les mêmes équations (196. et 197.), donne

$$200. \quad \overset{v}{\log} z = \overset{u}{\log} z \overset{v}{\log} u \quad \text{et} \quad \overset{e}{\log} z = \overset{u}{\log} z \overset{e}{\log} u,$$

ou bien

$$201. \quad \overset{v}{\log}(u^y) = \overset{u}{\log}(u^y) \overset{v}{\log} u \quad \text{et} \quad \overset{e}{\log} z = \overset{u}{\log}(u^y) \overset{e}{\log} u,$$

ou bien encore

$$202. \quad \overset{v}{\log}(u^y) = y \overset{v}{\log} u \qquad \text{et} \quad \overset{e}{\log} z = y \overset{e}{\log} u.$$

De (200.) on tire

$$203. \quad \overset{u}{\log} z = \overset{v}{\log} z . \frac{1}{\overset{v}{\log} u} = \overset{e}{\log} z . \frac{1}{\overset{e}{\log} u}.$$

Cela fait voir que pour trouver le logarithme d'une quantité quelconque z, la base étant u, par celui de la même quantité pour la base v ou e, il n'y a qu'à diviser ce dernier logarithme par celui de la nouvelle base, tiré du système précédent des logarithmes. En partant des logarithmes dits naturels, le multiplicateur $\frac{1}{\overset{e}{\log} u}$ (203.) est le module du nouveau système, qui a u pour base.

Si w est une nouvelle base, les équations (202.) donnent $\overset{v}{\log}(u^y) = y \overset{v}{\log} u$ et $\overset{w}{\log}(u^y) = y \overset{w}{\log} u$, donc

$$204. \quad \frac{\overset{v}{\log}(u^y)}{\overset{w}{\log}(u^y)} = \frac{\overset{v}{\log} u}{\overset{w}{\log} u}$$

et cela fait voir que les logarithmes d'une même puissance quelconque u^y, tirés des systèmes différents des logarithmes, sont en raison des logarithmes des bases v et w des deux systèmes sans que l'exposant y y entre.

VI. Si l'on suppose $u = e^m$, e étant toujours la quantité (190.) on a

$$205. \quad m = \overset{e}{\log}(e^m) = \overset{e}{\log} u.$$

Mais $u = e^m$ donne $u^k = (e^m)^k = e^{mk}$. Donc en vertu de (189.), en y mettant mk au lieu de k,

$$206. \quad u^k = 1 + mk + \frac{(mk)^2}{2} + \frac{(mk)^3}{2.3} \ldots + \frac{(mk)^n}{2.3 \ldots n} \ldots$$

et puisque m, comme nous venons de voir, peut être exprimé par $\overset{e}{\log} u$,

$$207. \quad u^k = 1 + k \overset{e}{\log} u + \frac{(k \overset{e}{\log} u)^2}{2} + \frac{(k \overset{e}{\log} u)^3}{2.3} \ldots + \frac{(k \overset{e}{\log} u)^n}{2.3 \ldots n} \ldots$$

En comparant cette formule à l'expression de u^k (183.) on voit que

$$208. \quad \frac{u^0 - 1}{0} = \overset{e}{\log} u.$$

La formule (178.) donne le même résultat en y faisant $u = e$. En effet elle donne dans ce cas $\frac{(e^m)^0 - 1}{0} = m \frac{e^0 - 1}{0}$. Mais $\frac{e^0 - 1}{0} = 1$ (191.) donc $\frac{(e^m)^0 - 1}{1}$ ou bien $\frac{u^0 - 1}{0} = m$, et puisque $m = \overset{e}{\log} u$ (205.), $\frac{u^0 - 1}{0} = \overset{e}{\log} u$, comme (208.).

On appelle **séries exponentielles** les séries semblables à celles (207. et 189.). Elles sont, comme il a été démontré plus haut, convergentes pour une valeur quelconque de k et u.

VII. En mettant $1 + x$ au lieu de u dans (208.) on a

$$209. \quad \overset{e}{\log}(1 + x) = \frac{(1+x)^0 - 1}{0}$$

et en vertu de (170.)

$$210. \quad \overset{e}{\log}(1 + x) = x - \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{3}x^3 - \tfrac{1}{4}x^4 + \tfrac{1}{5}x^5 \ldots \pm \frac{1}{n}x^n \ldots$$

Cette série, comme il a été démontré (§. 27. IV.) est d'abord convergente dans les cas où x est >0 et <1. Mais elle l'est également si $x<0$ et >-1. Car si x est négatif, la série (210.) se réduit à $\log(1-x) = -\left(x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{4}x^4\ldots.+\frac{1}{n}x^n\ldots..\right)$ où maintenant x est regardé comme positif. La valeur absolue du reste R_n de cette série qui suit le terme $\frac{1}{n}x^n$, savoir $R_n=\frac{x^{n+1}}{n+1}\left(1+x\frac{n+1}{n+2}+x^2\frac{n+1}{n+3}\ldots.\right)$ est évidemment plus grande que zéro et plus petite que $\frac{x^{n+1}}{n+1}(1+x+x^2\ldots.)=\frac{x^{n+1}}{n+1}\cdot\frac{1}{1-x}$. Cette seconde limite de la valeur du reste R_n est également zéro pour $n=\infty$ si $x<1$. Donc R_n est zéro pour $n=\infty$ et la série est convergente également dans le cas $x<0$ et >-1. Donc elle est convergente si x tombe entre -1 et $+1$.

Puisqu'en vertu de (203.) pour toute autre base v, $\log_v u=\frac{\log_e u}{\log_e v}$ on a

$$\textbf{211.}\quad \log(1+x)=\frac{x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{4}x^4\ldots.\pm\frac{1}{n}x^n\ldots.}{\log_e v}.$$

On sait que les séries peu convergentes (210.) et (211.) qui donnent le logarithme de $1+x$ peuvent être rendues plus convergentes de différentes manières; mais nous ne nous y arrêterons pas.

30.

Dans ce qui précède la quantité z de l'expression $u^y=z$ a été exprimée par y et u de deux manières différentes, savoir par les séries (145. et 207.). Ces deux séries différentes, exprimant une seule et même quantité, viennent des deux valeurs $\alpha=1$ et $\alpha=0$ que peut avoir la quantité arbitraire α dans le développement général des fonctions (78.). De plus la quantité y de l'expression $u^y=z$ a été exprimée en u et z par la série (211.) y étant le logarithme de z pour la base u. Dans la série (211.) $1+x$ et v prennent la place de z et u. Donc, des trois problèmes (135.) qui se présentent dans le développement des puissances, il ne reste que le troisième, savoir d'exprimer, u par y et z. Mais la solution de ce problème n'exige pas de nouveau développement. De $u^y=z$

on tire $u = z^{\frac{1}{y}}$ (10.), de sorte que u peut être exprimé en z et y au moyen des séries (145. et 207.).

Il y a encore à remarquer que les expressions des puissances que nous venons de présenter n'en donnent qu'une seule valeur. Pour avoir les autres, s'il y en a, il n'y a suivant (§. 9.) qu'à multiplier les expressions par la puissance de l'unité qui a le même exposant.

Maintenant nous venons aux **fonctions angulaires** qui particulièrement se rapportent aux puissances à **exposans imaginaires.** Nous en donnerons le développement en faisant voir en même tems qu'il peut être exécuté à l'aide du développement général seul sans avoir recours aux considérations géométriques ni à d'autres considérations étrangères à l'objet.

V. Application de la série générale de développement aux fonctions angulaires.

31.

Il n'y a d'autre condition de l'**existence de la série particulière de Taylor** (91.) que celle qu'aucun des coëfficiens différentiels qui y entrent ne doit être infini; la quantité k de laquelle varie la variable x peut être tout ce qu'on voudra, réelle ou imaginaire, ou même infinie (à voir §. 18.). Donc aussi les séries que donne la série particulière de Taylor, si on l'applique aux puissances, par ex. les séries (145. 180. 189.) auront lieu pour une valeur quelconque de k, réelle ou imaginaire (à voir §. 27. VI.). Ce n'est pas l'existence des séries, c'est le théorème général (§. 21.) de la **convergence** des séries tirées du développement général, qui exige que toutes les quantités qui entrent dans ces séries soient réelles, si l'on en veut juger la convergence.

Donc par ex. la série (189.) a lieu pour une valeur quelconque de k, même imaginaire et infinie, et si l'on fait $k = \pm x\sqrt{-1} = \pm ix$, $\sqrt{-1}$ étant supposé $= i$, on a généralement

$$212. \quad e^{\pm ix} = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{2.3.4} - \frac{x^6}{2.3....6} \cdots \pm \frac{x^{2n}}{2.3....2n} \cdots$$
$$\pm i\left(x - \frac{x^3}{2.3} + \frac{x^5}{2.3.4.5} - \frac{x^7}{2.3....7} \cdots \pm \frac{x^{2n+1}}{2.3....(2n+1)} \cdots\right)$$

pour une valeur quelconque de x. Mais le théorème de la convergence (§. 21.) ne peut être appliqué à cette série, puisqu'il exige la réalité de toutes les quantités.

La série (212.) n'est pas d'ailleurs moins générale que si au lieu de la base e du système de logarithmes naturels on met une quantité quelconque u, comme dans (207.), car $u^{\pm ix}$ étant $= e^{\pm imx}$ si $u = e^m$, il n'y a qu'à écrire mx au lieu de x pour avoir également l'expression de $u^{\pm ix}$ par la voie de la série (212.).

32.

Il s'agit maintenant de chercher les propriétés de l'expression (212.).

I. Désignons la partie réelle de cette expression par $\cos x$ et la partie imaginaire par $i \sin x$, de sorte que

213. $$1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{2.3.4} - \frac{x^6}{2.3....6} \cdots \pm \frac{x^{2n-2}}{2.3....(2n-2)} + R_{2n-2} = \cos x$$

214. $$x\left(1 - \frac{x^2}{2.3} + \frac{x^4}{2.3.4.5} - \frac{x^6}{2.3....7} \cdots \pm \frac{x^{2n-2}}{2.3....(2n-1)}\right) + R_{2n-1} = \sin x.$$

Nous invitons le lecteur à vouloir bien mettre ici à coté les idées du cercle et des lignes géométriques qu'on a coutume d'attacher aux mots *cos* et *sin*. Nous aurions choisi quelques autres signes pour les valeurs de séries (213. et 214.) si on avoit eu à craindre qu'on ne fît pas attention à l'invitation que nous venons de faire. Il ne s'agit ici que des expressions purement analytiques, et si ces expressions donnent en même tems les valeurs de certaines quantités géométriques, c'est à la géométrie et non pas à l'analyse de faire voir cela. Nous sommes absolument indifférents à ce que signifient les séries (213. et 214.) en géométrie. Il seroit évidemment contraire à une bonne méthode de mêler la géométrie à l'analyse. La géométrie peut avoir besoin de l'analyse, mais elle ne peut jamais la précéder ni s'y mêler.

II. La somme de deux termes consécutifs de la série (213.) est

215. $$\pm \frac{x^{2n}}{2.3....(2n+3)}((2n+1)(2n+2) - x^2)$$

et la somme de deux termes consécutifs de la série (214.)

216. $$\pm \frac{x^{2n+1}}{2.3....(2n+3)}((2n+2)(2n+3) - x^2).$$

Puisque x a été supposé réel, x^2 et toujours positif, comme n. Donc le facteur $(2n+1)(2n+2)-x^2$ de l'expression (215.) est positif si $2n+1 =$ ou $> x$, et le facteur $(2n+2)(2n+3)-x^2$ de l'expression (216.) l'est si $2n+2 =$ ou $> x$. Donc dans ces cas la somme de deux termes consécutifs dans les deux séries (213. et 214.) prend le signe de son premier terme. Mais les termes des séries (213. et 214.) ont alternativement les mêmes signes et les exposans de x vont en croissant; donc tous les couples de termes qui suivent ceux (215. et 216.) ont les mêmes signes. Donc aussi la somme de tous les termes dès celui $\frac{x^{2n}}{2.3....2n}$ dans (213.) et dès celui $\frac{x^{2n+1}}{2.3....(2n+1)}$ dans (214.), x étant respectivement $=$ ou $< 2n+1$ et $=$ ou $< 2n+2$, ont les mêmes signes que ces premiers termes eux-mêmes. C'est-à-dire les restes des séries (213. et 214.) R_{2n-2} et R_{2n-1} ont les mêmes signes que leurs premiers termes dès $2n+1 =$ ou $> x$ dans (213.) et dès $2n+2 =$ ou $> x$ dans (214.)

III. Donc si l'on continue les séries jusqu'à quelque terme positif dont l'exposant soit assez élevé pour donner $2n+1 =$ ou $> x$ dans la première et $2n+2 =$ ou $> x$ dans la seconde, les sommes de ces parties des séries seront nécessairement plus petites que les sommes des séries prises dans toute leur étendue, les restes étant positifs. Mais si on réunit encore les premiers termes des restes aux sommes des parties detachées des séries, de sorte que maintenant les premiers termes des restes soient négatifs, les signes des termes allant toujours en alternant, les sommes des parties détachées des séries seront nécessairement plus grandes que celles des séries entières, les nouveaux restes étant negatifs.

Si au contraire on continue d'abord les séries jusqu'à quelque terme négatif d'un exposant assez élevé pour donner $2n+1 =$ ou $> x$ dans la première et $2n+2 =$ ou $> x$ dans la seconde, les sommes de ces parties des séries seront, par des raisons semblables, plus grandes que les sommes des séries prises dans toute leur étendue, et plus petites si l'on réunit encore aux partiés détachées des séries les premiers termes des restes.

Donc les sommes des séries (213. et 214.) seront comprises dans tous les cas entre celles des termes qui précèdent les restes R_{2n-2} et R_{2n-1}, x étant respectivement $=$ ou $< 2n+1$ et $=$ ou $< 2n+2$, et celles des

mêmes termes réunis aux premiers termes des restes. Donc zéro et les valeurs des premiers termes des restes seront des limites pour les valeurs des restes, c'est-à-dire

217. R_{2n-2} dans (213.) sera entre 0 et $\pm\frac{x^{2n}}{2.3....2n}$, $2n+1$ étant $=$ ou $>x$, et

218. R_{2n-1} dans (214.) sera entre 0 et $\pm\frac{x^{2n+1}}{2.3....(2n+1)}$, $2n+2$ étant $=$ ou $>x$.

Les valeurs des restes des séries (213. et 214.) seront donc comprises entre celles des valeurs de leurs premiers termes qui correspondent aux plus grandes et plus petites valeurs de x depuis zéro jusqu'à x. Donc le théorème général sur la convergence des séries a lieu également ici.

IV. Si $n=\infty$ les quantités $\pm\frac{x^{2n}}{2.3....2n}$ et $\pm\frac{x^{2n+1}}{2.3....(2n+1)}$, en vertu de ce qui a été démontré (§. 28. VI.), seront zéro; donc dans ce cas les limites des valeurs des restes (217. et 218.) sont zéro toutes les deux. Donc les restes eux mêmes seront nuls. Et puisque $2n+1$ et $2n+2$ peuvent être toujours plus grands que x, quelque grande que soit cette quantité, on voit que les séries (213. et 214.) seront toujours convergentes pour une valeur quelconque de x.

V. Si $x<1$ ou $=1$, les expressions des restes (217. 218.) seront déjà applicables aux séries (213. 214.) dès leurs premiers termes, puisque dans ce cas $2n+1$ et $2n+2=$ ou $>x$ même pour $n=0$. Elles le seront à plus forte raison si des séries on prend plus d'un terme. Donc, x étant supposé $=1$, on trouve que

219. cos 1 est entre 1 et 0, entre 1 et $1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$, entre $1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$ et $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2.3.4}=\frac{13}{24}$ etc.

220. sin 1 entre 0 et 1, entre 1 et $1-\frac{1}{2.3}=\frac{5}{6}$, entre $1-\frac{1}{2.3}=\frac{5}{6}$ et $1-\frac{1}{2.3}+\frac{1}{2.3.4.5}=\frac{101}{120}$ etc.

VI. Les expressions (217. et 218.) des limites des restes des séries (213. et 214.) font voir à la vérité que ces limites varient suivant la loi de continuité avec x en même tems; mais il n'est pas démontré par là que les restes eux-mêmes varient suivant cette même loi; et encore moins que tandis que par ex. x augmente, les restes augmentent également; il se pourroit au contraire qu'ils allassent alternativement en croissant et en diminuant. En effet il seroit possible que l'augmentation des termes dont les signes sont égaux l'emportât alternativement

sur celle des termes à signes opposés. Il nous importe, comme on le verra par la suite, de décider cette question.

Si λ exprime un nombre fractionnaire ou irrationnel quelconque, positif et plus petit que x, deux valeurs successives de x, si cette quantité va en augmentant, pourront être représentées par λx et x. Cela posé, la variation de la somme de deux termes consécutifs de la série (213.) sera

$$221. \quad v_1 = \frac{x^{2n}}{2.3....2n}(1-\lambda^{2n}) - \frac{x^{2n+2}}{2.3....(2n+2)}(1-\lambda^{2n+2})$$
$$= \frac{x^{n2}}{2.3....(2n+2)}((2n+1)(2n+2)(1-\lambda^{2n}) - x^2(1-\lambda^{2n+2}))$$

et celle de la somme de deux termes consécutifs de la série (214.)

$$222. \quad v_2 = \frac{x^{2n+1}}{2.3....(2n+1)}(1-\lambda^{2n+1}) - \frac{x^{2n+3}}{2.3....(2n+3)}(1-\lambda^{2n+3})$$
$$= \frac{x^{2n+1}}{2.3....(2n+3)}((2n+2)(2n+3)(1-\lambda^{2n+1}) - x^2(1-\lambda^{2n+3})).$$

Supposons dans (221.) $1-\lambda^{2n+2} < k(1-\lambda^{2n})$. Cela donne $1-\lambda^{2n}+\lambda^{2n}(1-\lambda^2) < k(1-\lambda^{2n})$ et en divisant par $1-\lambda^{2n}$, comme cela est permis, $1-\lambda^{2n}$ étant positif, $1+\lambda^{2n}\frac{1-\lambda^2}{1-\lambda^{2n}} < k$, ou bien

$$223. \quad 1+\lambda^{2n}\frac{1+\lambda}{1+\lambda+\lambda^2....+\lambda^{2n-1}} < k.$$

Faisons semblablement $1-\lambda^{2n+3} < k_1(1-\lambda^{2n+1})$ dans (222.). Cela donne $1-\lambda^{2n+1}+\lambda^{2n+1}(1-\lambda^2) < k_1(1-\lambda^{2n+1})$ et en divisant par $1-\lambda^{2n+1}$, $1+\lambda^{2n+1}\frac{1-\lambda^2}{1-\lambda^{2n+1}} < k_1$, ou bien

$$224. \quad 1+\lambda^{2n+1}\frac{1+\lambda}{1+\lambda+\lambda^2....+\lambda^{2n}} < k_1.$$

Puisque λ est positif et <1, λ^{2n} et λ^{2n+1} sont <1, et $1+\lambda$ est $<1+\lambda+\lambda^2....+\lambda^{2n-1}$ $<1+\lambda+\lambda^2....+\lambda^{2n}$; donc les sommes des termes à gauche dans (223. et 224.) seront moindres que 2 et on satisfera aux expressions (223. et 224.) pour toutes les valeurs possibles de λ et pour toutes les valeurs que peut avoir n depuis 1 jusqu'à ∞, en supposant k et $k_1 = 2$. Donc on aura toujours

$$225. \quad 1-\lambda^{2n+2} < 2(1-\lambda^{2n}) \text{ et}$$
$$226. \quad 1-\lambda^{2n+3} < 2(1-\lambda^{2n+1}).$$

Cela fait voir que dans (221.)

227. $(2n+1)(2n+2)(1-\lambda^{2n})-x^2(1-\lambda^{2n+2})>[(2n+1)(2n+2)-2x^2](1-\lambda^{2n})$

et dans (222.)

228. $(2n+2)(2n+3)(1-\lambda^{2n+1})-x^2(1-\lambda^{2n+3})>[(2n+2)(2n+3)-2x^2](1-\lambda^{2n+1})$.

Supposons $x<n+1$ dans (227.) on aura $2x^2<2n^2+4n+2$, donc $(2n+1)(2n+2)$ étant $=4n^2+6n+2$, $(2n+1)(2n+2)-2x^2>0$ pour toutes les valeurs de n depuis 1 jusqu'à l'infini.

Supposons $x=$ ou $<n+1$ dans (228.), on aura $2x=$ ou $<2n^2+4n+2$, donc $(2n+2)(2n+3)$ étant $=4n^2+10n+6$, $(2n+2)(2n+3)-2x^2>0$ pour toutes les valeurs de n depuis 0 jusqu'à l'infini.

Mais $1-\lambda^{2n}$ dans (227.) et $1-\lambda^{2n+1}$ dans (228.) sont également toujours >0. Donc dans (227. et 228.) les quantités à droite, et à plus forte raison celles à gauche, seront toujours positives, sauf les conditions énoncées par les valeurs de x et n. Mais ces quantités sont les facteurs de $\frac{x^{2n}}{2.3....(2n+2)}$ et $\frac{x^{2n+1}}{2.3....(2n+3)}$ dans les expressions des variations de la somme de deux termes consécutifs des séries (213. 214) présentées (221. 222.). Donc ces variations auront nécessairement les mêmes signes que les quantités $\frac{x^{2n}}{2.3....(2n+2)}$ et $\frac{x^{2n+1}}{2.3....(2n+3)}$, ou bien que les premiers des deux termes choisis. Et puisqu'il en est de même, et successivement toujours à plus forte raison, de tous les couples de termes qui suivent, et que les premiers termes de ce couples ont tous les mêmes signes, on voit que les sommes des variations de tous les termes des séries, dès les premiers termes des restes, auront les mêmes signes que ces premiers termes eux mêmes, c'est-à-dire que les variations des restes des séries auront les mêmes signes que celles de leurs premiers termes. Donc les valeurs absolues des restes des séries augmentent suivant la loi de continuité si les valeurs absolues de leurs premiers termes vont en croissant, et elles diminuent si les premiers termes vont en diminuant, sous condition que dans (213.) x soit $<n+1$et dans (214.) $x=$ ou $<n+1$. Sous cette condition le théorème aura lieu respectivement pour toutes les valeurs de n depuis 1 et depuis 0 jusqu'à l'infini.

VII. Si x est $<$ ou $=1$ on a $x<n+1$ pour $n=1$. Donc le théorème (VI.) sera applicable dans ce cas aux deux séries dès leurs premiers

termes. On voit donc que la diminution de $\cos x$ va en croissant avec x en même tems depuis $x=0$ jusqu'à $x=1$, le second terme $\frac{x^2}{2}$ de la série (213.) étant négatif. Donc si x augmente depuis 0 jusqu'à 1, le cosinus diminue depuis 1 jusqu'à une certaine quantité qui suivant (219.) est entre $\frac{1}{2}$ et $\frac{13}{24}$. Le sinus va en croissant avec x en même tems, son premier terme étant positif. Si x augmente depuis 0 jusqu'à 1, le sinus augmente depuis 0 jusqu'à une certaine quantité qui suivant (220.) est entre $\frac{5}{6}$ et $\frac{101}{120}$. D'ailleurs les variations du cosinus et du sinus, dont il s'agit, ont lieu en même tems avec celles de x, suivant la loi de continuité.

33.

Ayant trouvé les propriétés principales des séries (213. et 214.): voyons ce qu'on en peut tirer d'ailleurs.

I. En premier lieu il y a à observer que, puisque les séries (213. et 214.) ne donnent qu'une seule valeur de la quantité $e^{\pm ix}$ (212.), il faut pour avoir les autres valeurs, multiplier par $1^{\pm ix}$ les quantités à droite dans (212.). De là on tire les expressions complètes de $e^{\pm ix}$ savoir

$$229. \quad e^{+ix} = 1^{+ix}(\cos x + i \sin x),$$
$$230. \quad e^{-ix} = 1^{-ix}(\cos x - i \sin x).$$

II. En multipliant ces expressions l'une par l'autre, on a

$$231. \quad 1 = \cos x^2 + \sin x^2.$$

Puisque les quantités $\cos x$ et $\sin x$, comme le font voir les expressions (213. et 214.), sont toujours réelles, de sorte que leurs quarrés ne peuvent être négatifs pour aucune valeur de x, l'équation (231.) fait voir que ni $\cos x^2$ ni $\sin x^2$ ne peut être plus grand que 1, c'est-à-dire que toutes les valeurs possibles de $\cos x$ et celles de $\sin x$ sont comprises entre $+1$ et -1

III. En multipliant les équations (229. et 230.) par $e^{\mp iy} = 1^{\mp iy}(\cos y \mp i \sin y)$ elles donnent

$$232. \quad e^{\pm i(x-y)} = 1^{\pm i(x-y)}[\cos x \cos y \pm i \cos y \sin x \mp i \sin y \cos x + \sin x \sin y],$$

et en y mettant $x-y$ au lieu de x,

$$233. \quad e^{\pm i(x-y)} = 1^{\pm i(x-y)}[\cos(x-y) \pm i \sin(x-y)].$$

En égalant les deux expressions de $e^{\pm i(x-y)}$ (232. et 233.) on a

$$234. \quad \cos x \cos y + \sin x \sin y \pm i(\cos y \sin x - \sin y \cos x) = \cos(x-y) \pm i \sin(x-y),$$

et puisque les parties réelles et les parties imaginaires doivent être zéro séparement,

$$235. \quad \cos(x-y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y,$$

$$236. \quad \sin(x-y) = \sin x \cos y - \cos x \sin y.$$

IV. Faisons changer mutuellement de place les quantités x et y dans (235. et 236.) on aura

$$\cos(y-x) = \cos y \cos x + \sin y \sin x,$$

$$\sin(y-x) = \sin y \cos x - \cos y \sin x.$$

En comparant ces expressions avec celles (235. et 236.) on voit que $\cos(y-x) = \cos(x-y)$ et $\sin(y-x) = -\sin(x-y)$ ou bien, en écrivant x au lieu de $x-y$,

$$237. \quad \cos(-x) = \cos(+x),$$

$$238. \quad \sin(-x) = -\sin(+x).$$

V. Mettant $-y$ au lieu de $+y$ dans (235. et 236.), ces expressions donnent

$$\cos(x+y) = \cos x \cos(-y) + \sin x \sin(-y)$$

$$\sin(x+y) = \sin x \cos(-y) - \cos x \sin(-y)$$

et en vertu de (237. 238.)

$$239. \quad \cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y,$$

$$240. \quad \sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y.$$

VI. En mettant $x = y$ dans (235. et 236.) on a

$$\cos 0 = \cos x^2 + \sin x^2 \quad \text{et} \quad \sin 0 = 0,$$

et en vertu de (231.)

$$241. \quad \cos 0 = 1,$$

$$242. \quad \sin 0 = 0.$$

VII. En mettant $x = y$ dans (239. et 240.) on a

$$243. \quad \cos 2x = \cos x^2 - \sin x^2,$$

$$244. \quad \sin 2x = 2 \sin x \cos x.$$

VIII. Comme en vertu de théorème (§. 32. VI. VII.) (c'est ici que nous avons besoin de ce théorème) dans le cas où x va en augmentant

depuis 0 jusqu'à 1, $\cos x$ diminue suivant la loi de la continuité depuis 1 jusqu'à une certaine quantité entre $\frac{1}{2} = 0{,}5$ et $\frac{1}{2}\frac{3}{4} = 0{,}5416\ldots$, est $\sin x$ augmente semblablement depuis 0 jusqu'à une certaine quantité comprise entre $\frac{5}{6} = 0{,}8333\ldots$ et $\frac{1}{1}\frac{0}{2}\frac{1}{0} = 0{,}84166\ldots$, il y aura nécessairement une valeur réelle de x entre 0 et 1 pour laquelle $\sin x$ est égal à $\cos x$. En effet si x est zéro, $\cos x$ est plus grand que $\sin x$, savoir $\cos x = 1$ et $\sin x = 0$, et si $x = 1$, $\cos x$ est plus petit que $\sin x$, savoir $\cos x$ entre 0,5 et 0,5416.... et $\sin x$ entre 0,8333.... et 0,84166.... donc puisque $\cos x$ peut avoir toutes les valeurs possibles depuis 1 jusqu'à une certaine valeur entre 0,5 et 0,5416.... et $\sin x$ toutes les valeurs possibles depuis 0 jusqu'à une certaine valeur entre 0,8333.... et 0,84166.... pendant que x prend également toutes les valeurs possibles entre 0 et 1, il y aura nécessairement quelque valeur de x entre 0 et 1 qui donne $\cos x = \sin x$.

Désignons par $\frac{1}{4}\pi$ la valeur encore inconnue de x, pour laquelle $\sin x = \cos x$, on aura en vertu de (231.) $1 = \sin x^2 + \sin x^2 = 2\sin x^2$, donc en vertu des équations (243. 244.)

$$245. \quad \cos\tfrac{1}{2}\pi = 0,$$

$$246. \quad \sin\tfrac{1}{2}\pi = 1.$$

En substituant (245. et 246.) dans (243. et 244.) on aura

$$247. \quad \cos\pi = 0 - 1 = -1$$

$$248. \quad \sin\pi = 2.0\,1 = 0.$$

En mettant $x = \pi$ et $y = \frac{1}{2}\pi$ dans (239. et 240.) on aura en vertu de (245.....248.)

$$249. \quad \cos\tfrac{3}{2}\pi = \cos\pi\cos\tfrac{1}{2}\pi - \sin\pi\sin\tfrac{1}{2}\pi = 0,$$

$$250. \quad \sin\tfrac{3}{2}\pi = \sin\pi\cos\tfrac{1}{2}\pi + \cos\pi\sin\tfrac{1}{2}\pi = -1.$$

En mettant $x = \pi$ dans (243. 244.), on a en vertu de (247. 248.)

$$251. \quad \cos 2\pi = 1,$$

$$252. \quad \sin 2\pi = 0.$$

Puis mettant $y = 2\pi$ dans (239. 240.) on aura en vertu de (251. 252.)

$$253. \quad \cos(2\pi + x) = \cos x\cos 2\pi - \sin x\sin 2\pi = \cos x \text{ et}$$

$$254. \quad \sin(2\pi + x) = \sin x\cos 2\pi + \cos x\sin 2\pi = \sin x.$$

De là on tire entre autres, n étant un nombre entier quelconque,

$$255. \quad \cos 2\pi = \cos 4\pi = \cos 6\pi \ldots = \cos 2n\pi = 1,$$

$$256. \quad \sin 2\pi = \sin 4\pi = \sin 6\pi \ldots = \sin 2n\pi = 0,$$

$$257. \quad \cos(2nx + x) = \cos x,$$

$$258. \quad \sin(2nx + x) = \sin x.$$

Les expressions analogues pour les valeurs négatives de x et y se trouvent à l'aide des équations (237. et 238.).

34.

Les expressions présentées dans le paragraphe précédent offrent comme on voit les principales formules trigonométriques ou plutôt goniométriques, desquelles on tire sans difficulté les autres de ce genre.

Les formules (§. 33. I. jusqu'à VII.) ont été tirées seulement de deux expressions (229. et 230.) et en démontrant ces dernières, le développement de $e^{\pm ix}$ en série (212.) ne nous a servi que pour faire voir que la quantité $e^{\pm ix}$ est composée de deux parties, l'une réelle, l'autre imaginaire. La forme de la série (212.) n'est pas entrée dans le calcul des expressions (§. 33. I. .... VII.). Ce n'étoit qu'en (§. 33. VIII.) où nous avions besoin des résultats de la recherche des séries (213. et 214.), savoir pour faire voir qu'il existe une valeur de x telle que $\cos x = \sin x$, d'où l'on a tiré les résultats de (§. 33. VIII.).

Au reste les expressions fondamentales de la goniométrie présentées (§. 33.) ont été trouvées par une voie purement analytique. On est parti de l'expression (212.), qui de son côté est sortie des transformations identiques. On n'a eu nulle part recours à la géométrie ni à d'autres théorèmes et idées étrangères à l'analyse. Cela fait voir bien clairement que la théorie des fonctions angulaires n'est nullement du domaine de la géométrie mais purement de celui de l'analyse aussi bien que la théorie des puissances ou des logarithmes. Il est bien singulier qu'ordinairement on tire de la géométrie la théorie des fonctions angulaires. On pourroit procéder également et avec le même droit pour les logarithmes. Mais c'est ce qu'on ne fait pas. Le logarithme naturel exprime, comme on sait, l'aire de l'hyperbole; c'est pourquoi on l'appelle logarithme hyperbolique. De l'hyperbole c'est l'aire qui donne le logarithme, du cercle c'est l'arc qui offre les fonctions angulaires. On abandonne, comme il le

faut le logarithme à l'analyse, mais on donne les fonctions angulaires à la géométrie sans la moindre raison. Cela est évidemment contraire à une bonne méthode. Il est vrai que la géométrie participe aux résultats de la théorie des fonctions angulaires comme à celles des logarithmes. Elle fait voir que le logarithme exprime effectivement l'aire de l'hyperbole, et c'est à elle de faire voir que si x représente un arc de cercle, les droites qu'on appelle sinus et cosinus dans la géométrie ont les mêmes rapports à x qu'expriment les équations (213. et 214.). Mais pour cela il n'y a pas de raison pour tirer ces relations des théorèmes de la géométrie, ni pour le cercle ni pour l'hyperbole.

35.

Nous tirerons des expressions du (§. 33.) celles des différentes valeurs que peut avoir une puissance quelconque de l'unité, parcequ'il y aura quelques remarques à faire, tant sur ces expressions que sur l'effet de la pluralité des valeurs des puissances.

Elevons à la puissance m^{me} les expressions (229. et 230.), nous aurons

$$259. \quad e^{\pm imx} = 1^{\pm imx}(\cos x \pm i \sin x)^m.$$

Mais si dans les mêmes expressions on écrit mx au lieu de x, on trouve

$$260. \quad e^{\pm imx} = 1^{\pm imx}(\cos mx \pm i \sin mx).$$

En égalant les deux expressions (259. et 260.) de $e^{\pm imx}$ on a

$$261. \quad (\cos x \pm i \sin x)^m = \cos mx \pm i \sin mx).$$

Si l'on fait $x = 2n\pi$, on a $\cos x = 1$ et $\sin x = 0$ (255. 256.). Donc dans ce cas l'équation (261.) donne

$$262. \quad (\cos 2n\pi \pm i \sin 2n\pi)^m = 1^m = \cos 2mn\pi \pm i \sin 2mn\pi.$$

Puisqu'ici la quantité arbitraire n peut être un nombre entier quelconque, l'expression (262.) donne toutes les valeurs différentes que peut avoir la puissance 1^m de l'unité. La valeur 0 étant également parmi les valeurs différentes du nombre n, et $\cos 0$ étant 1, $\sin 0 = 0$, une des valeurs différentes de 1^m est toujours l'unité. Cela s'accorde avec (§. 6.).

Maintenant il y a les remarques suivantes à faire sur les expressions qui précèdent.

36.

I. L'équation (261.) n'est pas complète pour toute autre valeur de x que $2n\pi$, si l'on veut que $(\cos x \pm i \sin x)^m$ exprime les différentes valeurs que peut avoir cette quantité. Car il ne se présente à gauche qu'une seule valeur pendant qu'à droite il y en a plusieurs. Mais l'équation (262.) a été rendue complète par l'introduction faite du nombre arbitraire n, même si l'on veut que la partie à gauche exprime toutes les valeurs qu'elle peut avoir; car le nombre des valeurs à gauche n'a pas été augmenté tandis que les différentes valeurs qui conviennent à l'exposant m ont été introduites dans la partie à droite. D'ailleurs il n'y a non plus à droite qu'une seule valeur pour chaque valeur déterminée de n. Il n'en seroit pas ainsi pour toute autre valeur de x.

II. La défectuosité de l'équation (261.) tirée des équations (259. 260.) vient de ce que le facteur $(\cos x \pm i \sin x)^m$ dans (259.) ne peut être censé exprimer qu'une seule valeur de cette quantité, vu que l'autre facteur $1^{\pm imx}$ exprime déjà inclusivement la pluralité des valeurs. Cette restriction étant observée, l'équation (261.) est effectivement complète. Veut on qu'elle exprime en même tems toutes les valeurs que peut avoir la quantité $(\cos x \pm i \sin x)^m$, il n'y a suivant (§. 9.) qu'à multiplier à droite par 1^m. Cela donne l'équation complète

$$263. \quad (\cos x \pm i \sin x)^m = (\cos mx \pm i \sin mx)\, 1^m.$$

Si dans (259.) on met y au lieu de x et qu'on multiplie le résultat par l'expression primitive, on trouve

$$264. \quad e^{\pm i(x+y)} = 1^{\pm i(x+y)} (\cos x \pm i \sin x)(\cos y \pm i \sin y).$$

Si au contraire on met $x+y$ au lieu de x dans (259.) on a

$$265. \quad e^{\pm i(x+y)} = 1^{\pm i(x+y)} (\cos(x+y) \pm i \sin(x+y)).$$

En égalant les deux expressions (264. et 265.) on a généralement

$$266. \quad (\cos x \pm i \sin x)(\cos y \pm i \sin y) = \cos(x+y) \pm i \sin(x+y).$$

Maintenant si dans (263.) on substitue la valeur de 1 (262.) on trouve

$$267. \quad (\cos x \pm i \sin x)^m = (\cos mx \pm i \sin mx)(\cos 2mn\pi \pm i \sin 2mn\pi)$$

et si à la partie droite de cette équation on applique celle (266.), on a

$$268. \quad (\cos x \pm i \sin x)^m = \cos m(x+2n\pi) \pm i \sin m(x+2n\pi)$$

où maintenant la pluralité des valeurs est observée des deux côtés.

On auroit eu précisement le même résultat en substituant $x+2n\pi$ au lieu de x dans (261.). Cette substitution auroit été permise puisqu'en vertu de (257. et 258.) $\cos(x+2n\pi)=\cos x$ et $\sin(x+2n\pi)=\sin x$, de sorte que la substitution faite, les quantités à gauche conservent encore la même valeur.

III. En négligeant la pluralité des valeurs des puissances on peut tomber dans plusieurs contradictions. Par ex. $\cos(x+2n\pi)$ et $\sin(x+2n\pi)$ ayant les mêmes valeurs que $\cos x$ et $\sin x$, les équations (229. 230.) peuvent être écrites comme suit

$$269. \quad e^{\pm ix}=1^{\pm ix}(\cos(x+2n\pi)\pm i\sin(x+2n\pi)).$$

Si de cette expression on prend la m^{me} puissance on a

$$270. \quad e^{\pm imx}=1^{\pm imx}(\cos(x+2n\pi)\pm i\sin(x+2n\pi))^m$$

et cela en vertu de (261.) est la même chose que

$$271. \quad e^{\pm imx}=1^{\pm imx}(\cos m(x+2n\pi)\pm i\sin m(x+2n\pi)).$$

Mais si au lieu de cela on écrit mx au lieu de x dans (269.) on a

$$272. \quad e^{\pm imx}=1^{\pm imx}(\cos(mx+2n\pi)\pm i\sin(mx+2n\pi)).$$

Donc en égalant les expressions (271. et 272.) de la quantité $e^{\pm imx}$, on trouve

$$273. \quad \cos(mx+2mn\pi)\pm i\sin(mx+2mn\pi)=\cos(mx+2n\pi)\pm i\sin(mx+2n\pi),$$

équation évidemment contradictoire.

La contradiction vient de ce que la quantité $\cos m(x+2n\pi)\pm i\sin m(x+2n\pi)$ dans (271.) qui est celle à gauche dans (273.) exprime toutes les valeurs différentes de la quantité $(\cos(x+2n\pi)\pm i\sin(x+2n\pi))^m$ (270.) qu'elle représente, ou bien de celle $(\cos x\pm i\sin x)^m$ qui lui est égale, tandis qu'au contraire la quantité $\cos(mx+2n\pi)\pm i\sin(mx+2n\pi)$ dans (272.) qui est celle à droite dans (273.) n'exprime qu'une seule valeur. Veut-on que la dernière représente également toutes les valeurs différentes qui existent, on la multipliera par $1^m=\cos 2mn\pi\pm i\sin 2mn\pi$ (262). Cette opération faite, les expressions (271. 272.), s'accorderont comme il est aisé de voir à l'aide de l'équation (266.), $2n\pi$ dans (272.) pouvant être supprimé sans changer la valeur de l'expression.

IV. Dans le cas $x=2n\pi$ les expressions (229. 230.), savoir $e^{\pm ix}=1^{\pm ix}(\cos x\pm i\sin x)$ présentent une difficulté particulière. Car dans ce cas on a $\cos x=\cos 2n\pi=1$ et $\sin x=\sin 2n\pi=0$, donc les ex-

pressions citées se réduisent à

$$274. \quad e^{\pm 2in\pi} = 1^{\pm 2in\pi}$$

et cette expression à la première vue semble être contradictoire, car en prenant les puissances $\pm 2in\pi^{\text{mes}}$ de deux côtés on trouve

$$275. \quad e^{-4n^2\pi^2} = 1^{-4n^2\pi^2}$$

et cela est évidemment faux. Cette difficulté pourra, à ce qu'il semble, être détruite également en faisant attention à la pluralité des valeurs.

En effet les expressions $e^{\pm 2in\pi}$ et $1^{\pm 2in\pi}$ ont la propriété de présenter, au moyen du nombre arbitraire n qui y entre, toutes les valeurs que peuvent avoir les quantités $e^{\pm 2i\pi}$ et $1^{\pm 2i\pi}$, car le facteur $\cos x \pm i \sin x$ de l'expression générale (229. 230.), si l'on y fait $x = 2n\pi$, est toujours 1 pour une valeur quelconque de n. Mais suivant la règle générale on a les valeurs différentes d'une puissance, en multipliant une quelconque de ses valeurs, par ex. la valeur réelle, s'il y en a, par la puissance de l'unité, qui a pour exposant celui de la puissance même. Ici les quantités $e^{\pm 2in\pi}$ et $1^{\pm 2in\pi}$ ont effectivement une valeur réelle, savoir celle qui correspond à la valeur zéro de n. Elle est $e^0 = 1^0 = 1$. Donc on peut, ou plutôt il faut exprimer $e^{\pm 2in\pi}$ et $1^{\pm 2in\pi}$ par $e^0 . 1^{\pm 2in\pi} = 1 . 1^{\pm 2in\pi}$ et par $1^0 . 1^{\pm 2in\pi} = 1 . 1^{\pm 2in\pi}$, de sorte que l'équation (274.), en ayant égard à la pluralité des valeurs, ne veut dire autre chose que

$$276. \quad 1 . 1^{\pm 2in\pi} = 1 . 1^{\pm 2in\pi};$$

et cette équation identique n'implique point de contradiction.

Voyons maintenant d'où peut venir l'erreur qu'offre l'équation (275.) qui exprime la $\pm 2in\pi^{\text{me}}$ puissance de l'expression (274.) ou (276.). L'équation (274.), dans la forme où elle est, n'exprime qu'une seule valeur des quantités à droite et à gauche, savoir celle qui convient à $n = 0$. Si l'on veut qu'elle donne toutes les valeurs différentes, qui ont lieu, il lui faut donner la forme (276.). Mais elle laisse indéterminées les autres valeurs dans cette forme, puisqu'elle est identique. Ces autres valeurs viennent au jour en prenant la puissance $\pm 2in\pi$. Même l'équation (275.) n'est pas fautive dans le cas $n = 0$. Elle ne l'est que pour les autres valeurs de n et la raison en est, qu'elle n'exprime pas complêtement toutes les valeurs qui existent. En effet on ne peut pas dire que

$$277. \quad (e^{\pm 2in\pi})^{\pm 2in\pi} = (1^{\pm 2in\pi})^{\pm 2in\pi}$$

mais au contraire on a

$$278. \quad e^{\pm 2in\pi} = 1^{\pm 2in\pi}.1.$$

C'est ce qu'on voit par l'équation (276.) qui 1 étant originairement $= e^0$, donne $1.1^{\pm 2in\pi} = e^0.1^{\pm 2in\pi} = e^{\pm 2in\pi}$, et également par les expressions (229. 230.) qui, $\cos x \pm i \sin x$ étant 1, si l'on fait $x = 2n\pi$, donnent également $e^{\pm 2in\pi} = 1^{\pm 2in\pi}1$. Donc au lieu de (274.) il faut écrire (278.). Si de cette expression on prend la puissance $\pm 2iv\pi$, ou plus généralement la puissance $\pm 2iv\pi$, on trouve

$$279. \quad e^{-4nv\pi^2} = 1^{-4nv\pi^2}.1^{\pm 2iv\pi}$$

et cette expression, comme nous le verrons tout à l'heure, n'est pas contradictoire, si l'on a égard aux valeurs différentes de n et v.

En effet l'expression (262.), ayant lieu pour une valeur quelconque de m, donne, en faisant $m = \pm 2iv\pi$,

$$280. \quad 1^{\pm 2iv\pi} = \cos(\pm 4inv\pi^2) \pm i \sin(\pm 4inv\pi^2).$$

Mais les séries (213. et 214.) ont lieu également pour une valeur quelconque de x; donc on a pour $x = \pm 4inv\pi$

$$281. \quad \cos(\pm 4inv\pi^2) = 1 + \frac{(4nv\pi^2)^2}{2} + \frac{(4nv\pi^2)^4}{2.3.4} + \frac{(4nv\pi^2)^6}{2.3....6} + ... \text{ et}$$

$$282. \quad \sin(\pm 4inv\pi^2) = \pm 4inv\pi^2 \left(1 + \frac{(4nv\pi^2)^2}{2.3} + \frac{(4nv\pi^2)^4}{2.3.4} + ...\right)^2.$$

Cela donne en vertu de (280.)

$$283. \quad 1^{\pm 2iv\pi} = 1 - 4nv\pi^2 + \frac{(4nv\pi^2)^2}{2} - \frac{(4nv\pi^2)^3}{2.3} + \frac{(4nv\pi^2)^4}{2.3.4} ....$$

Mais en vertu de (189.), en ne manquant pas de multiplier comme il faut par la puissance de l'unité, pour avoir toutes les valeurs qui peuvent avoir lieu, on a

$$284. \quad e^{-4nv\pi^2} = 1^{-4nv\pi^2}\left(1 - 4nv\pi^2 + \frac{(4nv\pi^2)^2}{2} - \frac{(4nv\pi^2)^3}{2.3} + \frac{(4nv\pi^2)^4}{2.3.4} - .....\right)$$

et si l'on substitue la valeur de $1^{\pm 2iv\pi}$ (283.) dans cette équation, on a

$$285. \quad e^{-4nv\pi^2} = 1^{-4nv\pi^2}.1^{\pm 2iv\pi^2}$$

et cela s'accorde avec (279.) de sorte qu'il n'y a plus de contradiction.

V. La difficulté, que dans ce qui précède l'équation (279.) semble présenter par ce qu'elle a une quantité imaginaire à droite sans en avoir à gauche, n'est qu'apparente. La puissance $1^{\pm 2in\pi}$ à exposant imaginaire, qui y entre, n'offre point de quantités imaginaires; il faudroit pour en pro-

duire un exposant réel des puissances de l'unité, comme le fait voir (262.). Toutes les valeurs de $1^{\pm 2iv\pi}$, suivant (283.), sont réelles; donc il n'y a pas dans (279.) des quantités imaginaires autres que celles qui viennent de $1^{-4nv\pi^2}$ pour $e^{-4nv\pi^2}$. L'équation (283.) donne toutes les valeurs que $1^{\pm 2iv\pi}$ peut avoir pour les valeurs différentes de v. Si dans l'équation (279.) on ne fait attention qu'aux valeurs réelles de $e^{-4n\pi^2}$ pour les différentes valeurs de v, elles peuvent être exprimées par

$$286. \quad 1^{\pm 2iv\pi} = |e|^{-4nv\pi^2}$$

d'où l'on voit, qu'elles sont toutes entre 1 et 0, e^{-0} étant 1 et $e^{-\infty} = 0$.

VI. L'equation (278.) semble présenter une autre difficulté. Car en développant la quantité $e^{\pm 2in\pi}$ en série suivant (189.), il semble que sa valeur soit composée d'une partie réelle et d'une autre imaginaire, et cela seroit en contradiction avec ce que donne l'équation (283.), suivant laquelle la valeur de la quantité $1^{\pm 2in\pi}$, égale à $e^{\pm 2in\pi}$ (283.), est toute réelle. Mais la difficulté n'est également qu'apparente. En effet en développant $e^{\pm 2in\pi}$ suivant (189.), l'expression

$$287. \quad e^{\pm 2in\pi} = 1 \pm 2in\pi - \frac{(2n\pi)^2}{2} \mp \frac{(2in\pi)^3}{2.3} + \frac{(2n\pi)^4}{2.3.4} \ldots.$$

n'est pas complète. Pour la compléter il faut la multiplier par $1^{\pm 2in\pi}$ et cela donne

$$288. \quad e^{\pm 2in\pi} = 1^{\pm 2in\pi}\left(1 \pm 2in\pi - \frac{(2n\pi)^2}{2} \mp \frac{(2in\pi)^3}{2.3} + \frac{(2n\pi)^4}{2.3.4} \ldots.\right).$$

Pour mettre en evidence les différentes valeurs de $e^{\pm 2in\pi}$ que cette équation présente, on ne peut que séparer des autres la valeur réelle de $e^{\pm 2in\pi}$, pour la multiplier après par $1^{\pm 2in\pi}$. Cette valeur réelle correspond à $n = 0$, donc elle est 1, suivant (287.) et suivant l'expression $e^{\pm 2in\pi}$ elle même, et on a

$$289. \quad e^{\pm 2in\pi} = 1^{\pm 2in\pi}.1.$$

C'est l'expression complète de $e^{\pm 2in\pi}$, qui s'accorde avec (287.)

VII. Si dans l'expression générale

$$290. \quad e^{\pm ix} = 1^{\pm ix}(\cos x \pm i \sin x) \quad (229.\ 230.)$$

on fait $x = (2n \pm 1)\pi$, on a suivant (257. 258. et 247. 248.) $\cos x = -1$ et $\sin x = 0$, donc

$$291. \quad e^{\pm i\pi(2n\pm 1)} = 1^{\pm i\pi(2n\pm 1)}.-1.$$

Ici il n'y a pas de valeur réelle ni à droite ni à gauche, car toutes les valeurs de n donnent des exposans imaginaires.

Si de (291.) on prend la puissance $\pm i\pi(2\nu\pm 1)$, on a

$$292.\quad e^{-\pi^2(2n\pm 1)(2\nu\pm 1)} = 1^{-\pi^2(2n\pm 1)(2\nu\pm 1)}.(-1)^{\pm i\pi(2\nu\pm 1)}$$

et cela n'implique pas de contradiction. En effet, faisons $x=(2n\pm 1)\pi$ dans (261.), on aura

$$293.\quad (-1)^m = \cos m(2n\pm 1)\pi \pm i\sin m(2n\pm 1)\pi;$$

donc si $m=\pm i(2\nu\pm 1)\pi$,

$$294.\quad (-1)^{\pm i\pi(2\nu\pm 1)} = \cos\pm i\pi^2(2n\pm 1)(2\nu\pm 1)\pm i\sin\pm i\pi^2(2n\pm 1)(2\nu\pm 1).$$

Cela donne, en développant le cosinus et le sinus suivant (213. 214.),

$$295.\quad (-1)^{\pm i\pi(2\nu\pm 1)} = 1-\pi^2(2n\pm 1)(2\nu\pm 1)+\frac{(\pi^2(2n\pm 1)(2\nu\pm 1))^2}{2}\ldots.$$

Mais en vertu de (189.), en multipliant à droite par 1^k, on a

$$296.\quad e^{-\pi^2(2n\pm 1)(2\nu\pm 1)} = 1^{-\pi^2(2n\pm 1)(2\nu\pm 1)}\left(1-\pi^2(2n\pm 1)(2\nu\pm 1)+\frac{(\pi^2(2n\pm 1)(2\nu\pm 1))^2}{2}\ldots\right).$$

Substituant (295.) dans (296.) le résultat s'accordera avec (292.).

VIII. Si dans (290.) on fait $x=(2n\pm\frac{1}{2})\pi$, on a suivant (257. 258. et 245. 246) $\cos x=0$ et $\sin x=\pm 1$ donc

$$297.\quad e^{\pm i\pi(2n\pm\frac{1}{2})} = 1^{\pm i\pi(2n\pm\frac{1}{2})}.\pm i.$$

Ici il n'y a non plus de valeur réelle ni à droite ni à gauche.

Si d'abord on prend la seconde puissance de (297.) on a

$$298.\quad e^{\pm i\pi(4n\pm 1)} = 1^{\pm i\pi(4n+1)}.-1.$$

Cette expression a la forme de celle (291.) d'où l'on voit qu'elle sera également exempte de contradiction.

Supposant $x=(2n\pm\frac{1}{2})\pi$ (261.) on a

$$299.\quad (\pm i)^m = \cos m(2n\pm\tfrac{1}{2})\pi\pm i\sin m(2n\pm\tfrac{1}{2})\pi,$$

donc si l'on fait $m=\pm i\pi(2\nu\pm\frac{1}{2})$

$$300.\quad (\pm i)^{\pm i\pi(2\nu\pm\frac{1}{2})} = \cos\pm i\pi^2(2n\pm\tfrac{1}{2})(2\nu\pm\tfrac{1}{2})\pm i\sin\pm i\pi^2(2n\pm\tfrac{1}{2})(2\nu\pm\tfrac{1}{2}).$$

Cela posé, si de (297.) on prend la puissance $\pm i\pi(2\nu\pm\frac{1}{2})$, on a

$$301.\quad e^{-\pi^2(2n\pm\frac{1}{2})(2\nu\pm\frac{1}{2})} = 1^{-\pi^2(2n+\frac{1}{2})(2\nu\pm\frac{1}{2})}(\pm i)^{\pm i\pi(2\nu\pm\frac{1}{2})}.$$

Mais en vertu de (300. et 213. 214.) on a

$$302. \quad (\pm i)^{\pm i\pi(2n\pm\frac{1}{2})} = 1-\pi^2(2n\pm\tfrac{1}{2})(2\nu\pm\tfrac{1}{2})+\frac{(\pi^2(2n\pm\frac{1}{2})(2\nu\pm\frac{1}{2}))^2}{2}\ldots.$$

et suivant (189.), en multipliant par 1^k,

$$303. \quad e^{-\pi^2(2n\pm\frac{1}{2})(2\nu\pm\frac{1}{2})} = 1^{-\pi^2(2n\pm\frac{1}{2})(2\nu\pm\frac{1}{2})}\left(1-\pi^2(2n\pm\tfrac{1}{2})(2\nu\pm\tfrac{1}{2})+\frac{(\pi^2(2n\pm\frac{1}{2})(2\nu\pm\frac{1}{2}))^2}{2}\ldots.\right).$$

En substituant (302.) dans (303.) le résultat s'accordera avec (301.)

IX. L'équation générale

$$304. \quad e^{\pm ix} = 1^{\pm ix}(\cos x \pm i\sin x) \quad (229.\ 230.)$$

peut encore être exprimée comme suit.

En supposant $m = \pm ix$, l'expression (262.) donne

$$305. \quad 1^{\pm ix} = \cos\pm 2ixn\pi \pm i\sin\pm 2ixn\pi.$$

Mais on a en vertu de (213. 214.)

$$306. \quad \cos\pm 2ixn\pi = 1+\frac{(2xn\pi)^2}{2}+\frac{(2xn\pi)^4}{2.3.4}\ldots.$$

$$307. \quad \sin\pm 2ixn\pi = 2ixn\pi\left(1+\frac{(2xn\pi)^2}{2.3}+\frac{(2xn\pi)^4}{2.3.4.5}\ldots.\right),$$

donc suivant (305)

$$308. \quad 1^{\pm ix} = 1-2xn\pi+\frac{(2xn\pi)^2}{2}-\frac{(2xn\pi)^3}{2.3}+\frac{(2xn\pi)^4}{2.3.4}\ldots.$$

Mais suivant (189.), en multipliant par 1^k, on a

$$309. \quad e^{-2xn\pi} = 1^{-2xn\pi}\left(1-2xn\pi+\frac{(2xn\pi)^2}{2}-\frac{(2xn\pi)^3}{2.3}+\frac{(2xn\pi)^4}{2.3.4}\ldots.\right);$$

donc en substituant (308.) dans (309.) $e^{-2xn\pi} = 1^{-2xn\pi}\,1^{\pm ix}$ et de là

$$310. \quad 1^{\pm ix} = e^{-2xn\pi}.1^{+2xn\pi}.$$

En substituant cette expression dans (304.) on a

$$311. \quad e^{\pm ix} = e^{-2xn\pi}.1^{+2xn\pi}(\cos x \pm i\sin x)$$

et c'est l'expression des différentes valeurs de $e^{\pm ix}$.

Si l'on veut se servir de l'expression (308.) de $1^{\pm ix}$ pour la substituer dans (304.) on a

$$312. \quad e^{\pm ix} = (\cos x \pm i\sin x)\left(1-2xn\pi+\frac{(2xn\pi)^2}{2}-\frac{(2xn\pi)^3}{2.3}+\ldots.\right).$$

C'est une autre expression complète de $e^{\pm ix}$.

Si dans (311.) on fait $x = 2n\pi$ on a $e^{\pm 2in\pi} = e^{-4n^2\pi^2} . 1^{4n^2\pi^2}$ ou bien

$$313. \quad e^{-4n^2\pi^2} = 1^{-4n^2\pi^2} . e^{\pm 2in\pi}.$$

Mais suivant (279.), en y faisant $n = \nu$, on a

$$314. \quad e^{-4n^2\pi^2} = 1^{-4n^2\pi^2} 1^{\pm 2in\pi}$$

donc (312. et 313.) donnent

$$315. \quad e^{\pm 2in\pi} = 1^{\pm 2in\pi}$$

et cela s'accorde avec (274.).

X. On voit par les exemples (IV. VII. VIII.) combien il est nécessaire, dans beaucoup de cas, d'avoir attention à la pluralité des valeurs des puissances, et de compléter leurs expressions par la multiplication d'une de leurs valeurs quelconque, par ex. de la valeur réelle, s'il y en a, par la même puissance de l'unité. Dans tous les cas où il se peut agir de la pluralité des racines, il ne faut pas écrire simplement u^v, mais plutôt $|u|^v . 1^v$, où $|u|^v$ désigne une valeur déterminée de $|u|^v$ et par préférence la valeur réelle s'il en existe. Dans les cas où il n'y a pas de valeur réelle, l'expression $e^{\pm ix} = \cos x \pm i \sin x$ remplace $|u|^v$; car généralement la quantité $e^{\pm ix}$ n'a pas de valeur réelle. Elle n'en a que dans le cas $x = 2n\pi$, le seul où la partie imaginaire $\pm i \sin x$ est zéro. Pour toute autre valeur de x cette partie imaginaire n'est pas zéro. Si $x = 2n\pi$, la quantité $e^{\pm ix}$ reprend une valeur réelle, savoir celle qui correspond à $n = 0$ dans son expression complète. Cette valeur est $e^0 = 1$. Dans ce cas la forme $|u|^v 1^v$ de l'expression de la puissance reprend sa place.

Nous ne donnons ce que contient le paragraphe présent que comme un essai pour éclaircir les difficultés que les exposans imaginaires présentent dans la théorie des puissances. Nous le soumettons, comme tout le reste du mémoire, aux lumières de ceux qui ont approfondi l'analyse.

37.

Avant de quitter les fonctions angulaires il faut que nous disions un mot des expressions en forme de factorielles de $\cos x$ et $\sin x$ par x, ces expressions étant utiles dans la théorie des facultés analytiques. Nous en donnerons le développement par un procédé très simple. Nous ferons précéder ce développement par celui de quelques autres formules qui s'y rapportent ordinairement et dont nous aurons besoin dans la suite.

I. En mettant $x+2n\pi$, n étant un nombre entier quelconque, au lieu de x dans (261.) et $\frac{1}{m}$ au lieu de m, on a

$$316. \quad (\cos x \pm i \sin x)^{\frac{1}{m}} = \cos\frac{x+2n\pi}{m} \pm i \sin\frac{x+2n\pi}{m}$$

$\cos(x+2n\pi)$ et $\sin(x+2n\pi)$ étant égaux à $\cos x$ et $\sin x$.

Si de cette expression on prend la m^{me} puissance on a

$$317. \quad \cos x \pm i \sin x = \left(\cos\frac{x+2n\pi}{m} \pm i \sin\frac{x+2n\pi}{m}\right)^m.$$

Donc si a désigne une quantité quelconque, on trouve

$$318. \quad a^m - (\cos x + i \sin x) = a^m - \left(\cos\frac{x+2n\pi}{m} + i \sin\frac{x+2n\pi}{m}\right)^m \text{ et}$$

$$319. \quad a^m - (\cos x - i \sin x) = a^m - \left(\cos\frac{x+2n\pi}{m} - i \sin\frac{x+2n\pi}{m}\right)^m$$

où n représente tous les nombres entiers zéro y compris.

Maintenant si m est un nombre entier, les quantités à droite dans (318. et 319.) seront divisibles par

$$320. \quad a - \left(\cos\frac{x+2n\pi}{m} + i \sin\frac{x+2n\pi}{m}\right) \text{ et}$$

$$321. \quad a - \left(\cos\frac{x+2n\pi}{m} - i \sin\frac{x+2n\pi}{m}\right).$$

Donc les quantités (320. et 321.) seront facteurs des quantités à gauche dans (318. et 319.).

Mais les quantités (320. 321.) auront m valeurs différentes, ni plus ni moins. On les trouve en faisant $n = 0, 1, 2, 3 \ldots (m-1)$. Les valeurs positives de n, qui suivent, ou les valeurs négatives qui précèdent, ne donnent pas de nouvelles valeurs. Toutes ces valeurs des quantités (320. 321.) seront également diviseurs des quantités à droite et à gauche dans (318. 319.). Mais ces dernières quantités ne peuvent avoir plus de m diviseurs d'une dimension, a^m étant de la dimension m; donc les différentes valeurs des quantités (320. 321.) donneront tous les facteurs que les quantités (318. 319.) peuvent avoir.

Maintenant le produit des deux quantités à gauche dans (318. 319.) est

$$a^{2m} - a^m(\cos x + i \sin x + \cos x - i \sin x) + \cos x^2 + \sin x^2$$

ou bien

322. $a^{2m} - 2a^m \cos x + 1.$

Mais les produits des facteurs de deux quantités sont également facteurs du produit de ces mêmes quantités. Donc le produit des quantités (320. 321.) qui, semblable à celui de (318. et 319.), est

323. $a^2 - 2a \cos \frac{x + 2n\pi}{m} + 1$

représentera tous les facteurs de deux dimensions que peut avoir (322.). Donc on a

$$324. \quad a^{2m} - 2a^m \cos x + 1 = \left(a^2 - 2a \cos \frac{x}{m} + 1\right) \times \left(a^2 - 2a \cos \frac{2\pi + x}{m} + 1\right) \times \left(a^2 - 2a \cos \frac{4\pi + x}{m} + 1\right) \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \times \left(a^2 - 2a \cos \frac{2(m-1)\pi + x}{m} + 1\right).$$

Le cosinus compris dans le dernier facteur à droite de cette expression est aussi

$$= \cos - \left(\frac{2(m-1)\pi + x}{m}\right) = \cos \left(2\pi - \frac{2(m-1)\pi + x}{m}\right) = \cos \left(\frac{2\pi - x}{m}\right).$$

Celui de l'avant dernier facteur est

$$= \cos - \left(\frac{2(m-2)\pi + x}{m}\right) = \cos \left(2\pi - \frac{2(m-2)\pi + x}{m}\right) = \cos \left(\frac{4\pi - x}{m}\right)$$

etc. Si m est impair, le nombre $m-1$ des facteurs qui suivent le premier est pair; donc dans ce cas l'expression (324.) peut être mise sous la forme

$$325. \quad a^{2m} - 2a^m \cos x + 1 = a^2 - 2a \cos \frac{x}{a} + 1 \times \left(a^2 - 2a \cos \frac{2\pi + x}{m} + 1\right)\left(a^2 - 2a \cos \frac{2\pi - x}{m} + 1\right) \times \left(a^2 - 2a \cos \frac{4\pi + x}{m} + 1\right)\left(a^2 - 2a \cos \frac{4\pi - x}{m} + 1\right) \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \times \left(a^2 - 2a \cos \frac{(m-1)\pi + x}{m} + 1\right)\left(a^2 - 2a \cos \frac{(m-1)\pi - x}{m} + 1\right).$$

Si m est pair le $\frac{1}{2}m^{\text{me}}$ facteur à droite dans (324.) est

$$a^2-2a\cos\frac{m\pi+x}{m}+1=a^2-2a\cos\left(\pi+\frac{x}{m}\right)+1=a^2+2a\cos\frac{x}{m}+1;$$

les autres facteurs qui suivent le premier et dont le nombre est $m-2$ peuvent être exprimés comme ci-dessus. Donc dans le cas de m pair, on a

326.
$$a^{2m}-2a^m\cos x+1$$
$$=\left(a^2-2a\cos\frac{x}{m}+1\right)\left(a^2+2a\cos\frac{x}{m}+1\right)$$
$$\times\left(a^2-2a\cos\frac{2\pi+x}{m}+1\right)\left(a^2-2a\cos\frac{2\pi-x}{m}+1\right)$$
$$\times\left(a^2-2a\cos\frac{4\pi+x}{m}+1\right)\left(a^2-2a\cos\frac{4\pi-x}{m}+1\right)$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\times\left(a^2-2a\cos\frac{(m-2)\pi+x}{m}+1\right)\left(a^2-2a\cos\frac{(m-2)\pi-x}{m}+1\right).$$

Cela donne comme on voit le théorème de Moivre, dont celui de Cotes est un cas particulier.

II. Si dans les expressions ci-dessus on met 1 au lieu de a et $2x$ au lieu de x, les formules (325. et 326.) prennent la forme

327.
$$2(1-\cos 2x)=2^m\left(1-\cos\frac{2x}{m}\right)$$
$$\times\left(1-\cos\frac{2\pi+2x}{m}\right)\left(1-\cos\frac{2\pi-2x}{m}\right)$$
$$\times\left(1-\cos\frac{4\pi+2x}{m}\right)\left(1-\cos\frac{4\pi-2x}{m}\right)$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\times\left(1-\cos\frac{(m-1)\pi+2x}{m}\right)\left(1-\cos\frac{(m-1)\pi-2x}{m}\right),$$

qui a lieu dans le cas de m impair, et

328.
$$2(1-\cos 2x)=2^m\left(1-\cos\frac{2x}{m}\right)\left(1+\cos\frac{2x}{m}\right)$$
$$\times\left(1-\cos\frac{2\pi+2x}{m}\right)\left(1-\cos\frac{2\pi-2x}{m}\right)$$
$$\times\left(1-\cos\frac{4\pi+2x}{m}\right)\left(1-\cos\frac{4\pi-2x}{m}\right)$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\times\left(1-\cos\frac{(m-2)\pi+2x}{m}\right)\left(1-\cos\frac{(m-2)\pi-2x}{m}\right)$$

dans le cas de m pair.

Mais comme $1-\cos 2x = 2\sin x^2$ (231. et 243.) et de là $1+\cos 2x = 2\cos x^2$, on voit que les expressions ci-dessus, en extrayant la racine quarrée, se réduisent à

$$329.\quad \sin x = 2^{m-1} \sin\frac{x}{m} \sin\frac{\pi+x}{m} \sin\frac{\pi-x}{m} \sin\frac{2\pi+x}{m} \sin\frac{2\pi-x}{m} \ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots \sin\frac{\frac{1}{2}(m-1)\pi+x}{m} \sin\frac{\frac{1}{2}(m-1)\pi-x}{m}$$

pour le cas d'un m impair, et à

$$330.\quad \sin x = 2^{m-1} \cos\frac{x}{m} \sin\frac{x}{m} \sin\frac{\pi+x}{m} \sin\frac{\pi-x}{m} \sin\frac{2\pi+x}{m} \sin\frac{2\pi-x}{m} \ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots \sin\frac{\frac{1}{2}(m-2)\pi+x}{m} \sin\frac{\frac{1}{2}(m-2)\pi-x}{m}$$

dans le cas de m pair.

Ce sont, comme on voit, les expressions du sinus d'un arc multiple par le sinus de l'arc simple qu'Euler a trouvées par une autre voie dans *l'introd. in anal. inf. tom. I. cap.* 14. §. 240. On voit qu'elles se tirent immédiatement du théorème de Moivre.

III. Si l'on veut appliquer les expressions (329. 330.) au cas $x=0$, il faut recourir à la formule (214.). Cette formule donne

$$\frac{\sin x}{\sin\frac{x}{m}} = m\,\frac{1-\frac{x^2}{2.3}+\frac{x^4}{2.3.4.5}\ldots\ldots}{1-\frac{x^2}{2.3.m^2}+\frac{x^4}{2.3.4.5.m^4}\ldots\ldots},$$

donc pour $x=0$,

$$331.\quad \frac{\sin x}{\sin\frac{x}{m}} = m.$$

Si donc on divise les expressions (329. 330.) par $\sin\frac{x}{m}$ et qu'ensuite on fasse $x=0$, on trouve

$$m = 2^{m-1}\left(\sin\frac{\pi}{m}\right)^2\left(\sin\frac{2\pi}{m}\right)^2\left(\sin\frac{3\pi}{m}\right)^2\ldots\ldots\left(\sin\frac{m-1}{2m}\pi\right)^2,$$
$$m = 2^{m-1}\left(\sin\frac{\pi}{m}\right)^2\left(\sin\frac{2\pi}{m}\right)^2\left(\sin\frac{3\pi}{m}\right)^2\ldots\ldots\left(\sin\frac{m-2}{m}\pi\right)^2,$$

et en extrayant la racine quarrée,

$$332. \quad \sin\frac{\pi}{m}\sin\frac{2\pi}{m}\sin\frac{3\pi}{m}\ldots\ldots\sin\frac{m-1}{2m}\pi = \frac{m^{\frac{1}{2}}}{2^{\frac{m-1}{2}}} \text{ pour } m \text{ impair,}$$

$$333. \quad \sin\frac{\pi}{m}\sin\frac{2\pi}{m}\sin\frac{3\pi}{m}\ldots\ldots\sin\frac{m-2}{2m}\pi = \frac{m^{\frac{1}{2}}}{2^{\frac{m-1}{2}}} \text{ pour } m \text{ pair.}$$

Nous passons maintenant au développement de $\cos x$ et $\sin x$ en factorielles.

VI. C'est comme on sait le théorème de Cotés d'où l'on tire ordinairement les expressions de $\cos x$ et $\sin x$ en forme de factorielles. Euler par ex. (*Introd. in. anal. inf. tom. I. cap. IX.* §. 156.) les trouve à l'aide de ce théorème. Mais, comme nous verrons, on peut aussi avoir ces expressions à l'aide d'un autre lemme et sans le secours du théorème de Cotés.

Soit fx une fonction quelconque rationnelle de x, par ex.

$$334. \quad fx = x^n - a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} - a_3x^{n-3}\ldots\ldots \pm a_n.$$

Supposons qu'on sache d'ailleurs que la valeur de fx se réduit a zéro en donnant à x les n valeurs différentes $x_1, x_2, x_3, \ldots\ldots x_n$, on aura, en faisant par ex. $x = x_1$,

$$335. \quad x_1^n - a_1x_1^{n-1} + a_2x_1^{n-2} - a_3x_1^{n-3}\ldots\ldots \pm a_n = 0$$

Déduisant (335.) de (334.) on aura

$$336. \quad fx = x^n - x_1^n - a_1(x^{n-1} - x_1^{n-1}) + a_2(x^{n-2} - x_1^{n-2})\ldots\ldots \mp a_{n-1}(x - x_1).$$

Mais de cette équation tous les termes de la partie à droite sont divisibles par $x - x_1$ et, la division faite, le quotient sera une fonction rationnelle de x. Donc aussi fx sera nécessairement divisible par $x - x_1$, et le quotient sera également une fonction rationnelle. Mais fx sera également divisible par $x - x_2$, $x - x_3$, $\ldots\ldots$ $x - x_n$. Donc toutes les n quantités $x - x_1$, $x - x_2$, $x - x_3$, $\ldots\ldots$ $x - x_n$ seront facteurs de fx, et puisque cette quantité ne peut avoir plus de n facteurs, on aura

$$337. \quad fx = (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)\ldots\ldots(x - x_n)$$

pour une valeur quelconque de x.

Supposons exécutée la multiplication des facteurs (337.) il est aisé de voir, que le dernier terme du produit qui ne contient pas x, sera

$\pm x_1 x_2 x_3 \ldots . x_n$; donc en vertu de (334.) on a

$$338. \quad x_1 x_2 x_3 \ldots . x_n = a_n .$$

Supposons $a_n = 1$, on aura en divisant (337.) par $x_1 x_2 x_3 \ldots . x_n = 1$

$$339. \quad fx = \left(\frac{x}{x_1} - 1\right)\left(\frac{x}{x_2} - 1\right)\left(\frac{x}{x_3} - 1\right) \ldots . \left(\frac{x}{x_n} - 1\right).$$

Voila le lemme qu'il nous faut.

V. En vertu des expressions (213. 214.) $\cos x$ et $\sin x$ sont des fonctions rationnelles de x, desquelles on sait d'ailleurs que la première est zéro pour

$$x = +\tfrac{1}{2}\pi, \; -\tfrac{1}{2}\pi, \; +\tfrac{3}{2}\pi, \; -\tfrac{3}{2}\pi, \; +\tfrac{5}{2}\pi, \; -\tfrac{5}{2}\pi, \; \ldots .$$

et la seconde pour

$$x = 0, \; +\pi, \; -\pi, \; +2\pi, \; -2\pi, \; \text{etc.};$$

donc on a en vertu du lemme (IV.)

$$\cos x = \left(\frac{x}{\frac{1}{2}\pi} - 1\right)\left(\frac{x}{-\frac{1}{2}\pi} - 1\right)\left(\frac{x}{\frac{3}{2}\pi} - 1\right)\left(\frac{x}{-\frac{3}{2}\pi} - 1\right) \ldots . \text{ et}$$

$$\sin x = \left(\frac{x}{\pi} - 1\right)\left(\frac{x}{-\pi} - 1\right)\left(\frac{x}{2\pi} - 1\right)\left(\frac{x}{-2\pi} - 1\right) \ldots .$$

ou bien

$$340. \quad \cos x = \left(1 - \frac{4x^2}{\pi^2}\right)\left(1 - \frac{4x^2}{9\pi^2}\right)\left(1 - \frac{4x^2}{25\pi^2}\right) \ldots . \text{ et}$$

$$341. \quad \sin x = x\left(1 - \frac{x^2}{\pi^2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{4\pi^2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{9\pi^2}\right) \ldots .$$

Ce sont comme on voit les expressions connues de $\cos x$ et $\sin x$ en forme des factorielles.

Nous passons maintenant à l'application des formules générales de développement des fonctions aux facultés analytiques.

VI. Application des formules générales de développement des fonctions aux facultés analytiques.

38.

Les formules générales de développement des fonctions en séries seront surtout nécessaires au calcul des facultés analytiques dans les cas où les valeurs n'en peuvent être trouvées par la multiplication et l'addition seules. Il en est ici comme il en étoit des puissances et dans les autres cas semblables.

Ce seront toujours les propriétés fondamentales des facultés, exprimées par les équations fondamentales (38. 39. 40.) d'où les développements doivent partir.

Supposons la faculté

$$342. \quad (u, +x)^y = z,$$

il y aura quatre quantités dont chaque fois une dépendra de trois autres ou pourra en être regardée comme fonction.

Donc on pourra demander de calculer

$$343. \quad \begin{cases} z & \text{par } u, x \text{ et } y, \\ y & \text{par } u, x \text{ et } z, \\ x & \text{par } u, y \text{ et } z, \\ u & \text{par } x, y \text{ et } z, \end{cases}$$

et puisque ces calculs pourront être faits en variant un des trois élémens, les deux autres étant regardés comme invariables, il y aura douze problèmes, savoir:

$$344. \quad \begin{cases} 1, 2, 3 : \text{calculer } z \text{ par } u, x \text{ et } y \text{ en variant } u \text{ ou } x \text{ ou } y, \\ 4, 5, 6 : \text{calculer } y \text{ par } u, x \text{ et } z \text{ en variant } u \text{ ou } x \text{ ou } z, \\ 7, 8, 9 : \text{calculer } x \text{ par } u, y \text{ et } z \text{ en variant } u \text{ ou } y \text{ ou } z, \\ 10, 11, 12 : \text{calculer } u \text{ par } x, y \text{ et } z \text{ en variant } x \text{ ou } y \text{ ou } z. \end{cases}$$

Tous ces calculs doivent être praticables par les équations fondamentales.

Nous en entreprendrons les plus faciles et les plus utiles.

Développement des facultés analytiques par la variation de la base.

39.

On a ici pour l'application de la série générale de Taylor (78.)

$$345.\quad (u,+x)^{y} = z = Fu$$

et la série donne

$$346.\quad (u+k,+x)^{y} = (u,+x)^{y} + \frac{k}{\alpha}\Delta(u,+x)^{y} + \frac{k(k-\alpha)}{2\alpha^{2}}\Delta^{2}(u,+x)^{y} \ldots.$$
$$\ldots. + \frac{k(k-\alpha)\ldots.(k-(n-1)\alpha)}{2.3\ldots.n\alpha^{n}}\Delta^{n}(u,+x)^{y}$$
$$+ \frac{k(k-\alpha)\ldots.(k-n\alpha)}{2.3\ldots.n\alpha^{n}}\Delta^{n}\left(\frac{(u+k,+x)^{y}-(u,+x)^{y}}{k}\right) (= R_{n})$$

où par ex. $\Delta(u,+x)^{y}$ signifie $(u+\alpha,+x)^{y}-(u,+x)^{y}$.

Si l'exposant n'est pas un nombre entier, la série (346.) ne donne pas $(u+k,+x)^{y}$ sans le secours de facultés dans tous les termes. Mais si y est entier, il n'entre dans la série que des factorielles, calculables par la multiplication seule.

La quantité α étant arbitraire, on peut la supposer un multiple quelconque de x. Cela donnera les séries les plus simples. Nous supposerons $\alpha = -x$ et $\alpha = +x$.

40.

Premier cas $\alpha = -x$.

I. Dans ce cas on a

$$347.\quad \Delta(u,+x)^{y} = (u-x,+x)^{y} - (u,+x)^{y}.$$

En mettant dans la première équation fondamentale (38.) $u-x$, 1 et $y-1$ au lieu de u, y et k, elle donne $(u-x,+x)^{y} = (u-x,+x)^{1}(u-x+x,+x)^{y-1}$ ou bien, $(u-x,+x)^{1}$ étant $u-x$ en vertu de la troisième équation fondamentale (40.),

$$348.\quad (u-x,+x)^{y} = (u-x)(u,+x)^{y-1}.$$

Mais en faisant $y-1=y$ et $k=1$ dans la première équation fondamentale, on a $(u,+x)^{y} = (u,+x)^{y-1}(u+x(y-1),+x)^{1}$ ou bien

$$349.\quad (u,+x)^{y} = (u,+x)^{y-1}(u-x+xy).$$

Substituant (348. et 349.) dans (347). on trouve

$$350. \quad \Delta(u,+x)^y = -xy(u,+x)^{y-1}$$

II. Si dans (350.) on écrit $y-1$ au lieu de y on a $\Delta(u,+x)^{y-1} = -x(y-1)(u,+x)^{y-2}$, et x et y étant invariables, $\Delta(-xy(u,+x)^{y-1}) = +x^2y(y-1)(u,+x)^{y-2}$, donc en vertu de (350.)

$$351. \quad \Delta^2(u,+x)^y = +x^2y(y-1)(u,+x)^{y-2}.$$

On aura par la répétition du procédé:

$$\Delta^3(u,+x)^y = -x^3y(y-1)(y-2)(u,+x)^{y-3},$$

et généralement:

$$352. \quad \Delta^n(u,+x)^y = \pm x^n y(y-1)(y-2)\ldots(y-(n-1))(u,+x)^{y-n}.$$

Cela étant substitué dans (346.) et faisant attention que α a été supposé $=-x$, on aura

$$353. \quad (u+k,+x)^y = (u,+x)^y + ky(u,+x)^{y-1} + \frac{k(k+x)}{2}y(y-1)(u,+x)^{y-2}\ldots$$
$$\ldots + \frac{k(k+x)(k+2x)\ldots(k+(n-1)x)}{2.3\ldots n}y(y-1)(y-2)\ldots(y-(n-1))(u,+x)^{y-n} + R_n.$$

III. De (349.) on tire

$$354. \quad (u,+x)^{y-1} = \frac{(u,+x)^y}{u+(y-1)x},$$

donc, en mettant $y-1$ au lieu de y,

$$(u,+x)^{y-2} = \frac{(u,+x)^{y-1}}{u+(y-2)x},$$

et en substituant (354.) dans cette expression:

$$355. \quad (u,+x)^{y-2} = \frac{(u,+x)^y}{(u+(y-1)x)(u+(y-2)x)}.$$

En répétant ce procédé, on trouve

$$356. \quad (u,+x)^{y-3} = \frac{(u,+x)^y}{(u+(y-1)x)(u+(y-2)x)(u+(y-3)x)}$$

etc.

Si l'on substitue ces expressions dans (353.) on aura

$$357.\quad (u+k,+x)^y = (u,+x)^y\left[1+\frac{ky}{u+(y-1)x}+\frac{k(k+x)y(y-1)}{2(u+(y-1)x)(u+(y-2)x)}\right.$$
$$+\frac{k(k+x)(k+2x)y(y-1)(y-2)}{2.3(u+(y-1)x)(u+(y-2)x)(u+(y-3)x)}\cdots\cdots$$
$$\left.\cdots\cdots+\frac{k(k+x)(k+2x)\ldots(k+(n-1)x)y(y-1)(y-2)\ldots(y-(n-1))}{2.3\ldots n(u+(y-1)x)(u+(y-2)x)\ldots(u+(y-n)x)}\right]+R_n.$$

Voila le premier développement d'une faculté, la base étant variée. La série (357.) est connue sous le nom de série du binôme des facultés.

IV. La généralité des expressions des facultés ne diminue pas en mettant $=1$ la base ou la différence. Car en vertu de la seconde équation fondamentale on a par ex. $(u,+x)^y=\left(\frac{u}{x},+1\right)^y x^y$ et $(u+k,+x)^y=\left(\frac{u}{x}+\frac{k}{x},+1\right)^y x^y$, de sorte qu'il n'y a qu'à écrire u et k au lieu de $\frac{u}{x}$ et $\frac{k}{x}$ pour transformer les facultés $(u,+k)^y$ et $(u+k,+x)^y$ en d'autres, dont les différences sont 1. Si l'on veut restituer la différence x, il n'y a qu'à multiplier par x^y et qu'à écrire u et k au lieu de ux et kx. Donc on peut supposer $x=1$ dans (357.). Cela donne

$$358.\quad (u+k,+1)^y = (u,+1)^y\left[1+\frac{ky}{u+y-1}+\frac{k(k+1)y(y-1)}{2(u+y-1)(u+y-2)}\right.$$
$$+\frac{k(k+1)(k+2)y(y-1)(y-2)}{2.3(u+y-1)(u+y-2)(y+y-3)}\cdots\cdots$$
$$\left.\cdots\cdots+\frac{k(k+1)(k+2)\ldots(k+n-1)y(y-1)(y-2)\ldots(y-(n-1))}{2.3\ldots n(u+y-1)(u+y-2)\ldots(u+y-n)}\right]+R_n.$$

Cette expression est aussi générale que celle (357.)

V. Si dans (357.) on fait $x=0$ on a

$$359.\quad (u+k)^y = u^y\left[1+y\frac{k}{u}+\frac{y(y-1)}{2}\left(\frac{k}{u}\right)^2+\frac{y(y-1)(y-2)}{2.3\ldots n}\left(\frac{k}{u}\right)^3\cdots\cdots\right.$$
$$\left.\cdots\cdots+\frac{y(y-1)\ldots y-(n-1)}{2.3\ldots n}\left(\frac{k}{u}\right)^n\right]+R_n.$$

C'est comme on voit le théorème du binôme des puissances, comme il doit être. En effet la faculté $(u+k,+x)^y$ se réduit à la puissance u^y dans le cas $x=0$.

VI. Si dans (357.) on fait $u=x$, on a

360. $$(x+k,+x)^y = x^y(1,+1)^y\left[1+\frac{k}{x}+\frac{k(k+x)}{2x^2}+\frac{k(k+x)(k+2x)}{2.3x^3}\ldots.\right.$$
$$\left.\ldots.+\frac{k(k+x)(k+2x)\ldots.(k+(n-1)x)}{2.3\ldots.nx^n}\right]+R_n,$$

et en supposant $x=-1$,

361. $$(k-1,-1)^y = (-1)^y(1,+1)^y\left[1-k+\frac{k(k-1)}{2}-\frac{k(k-1)(k-2)}{2.3}\ldots.\right.$$
$$\left.\ldots.\pm\frac{k(k-1)(k-2)\ldots.k-(n-1)}{2.3\ldots.n}\right]+R_n,$$

ou bien

362. $$(k-1,-1)^y = (-1)^y(1,+1)^y[1-k_1+k_2-k_3\ldots.\pm k_n]+R_n.$$

VII. Dans le cas où l'exposant y est un nombre entier, on auroit pu tirer immédiatement l'expression (362.) des propriétés des coëfficiens binomiaux.

En effet, m étant un nombre entier quelconque, on a

$$(k-1)_m = \frac{(k-1)(k-2)\ldots.(k-(m-1))(k-m)}{2.3\ldots.(m-1)m} \text{ et}$$
$$(k-1)_{m-1} = \frac{(k-1)(k-2)\ldots.(k-(m-1))}{2.3\ldots.(m-1)},$$

donc

363. $$(k\text{-}1)_{m-1}+(k\text{-}1)_m = \frac{(k\text{-}1)(k\text{-}2)\ldots.(k\text{-}(m\text{-}1))}{2.3\ldots.(m-1)}\left(1+\frac{k-m}{m}\right) = \frac{k(k\text{-}1)(k\text{-}2)\ldots.(k\text{-}(m\text{-}1))}{2.3\ldots.m} = k_m.$$

donc

364.
$$\begin{cases} 1 = 1 \\ -k = -1-(k-1)_1 \\ +k_2 = (k-1)_1+(k-1)_2 \\ -k_3 = -(k-1)_2-(k-1)_3 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \mp k_{n-1} = \mp(k-1)_{n-2}\mp(k-2)_{n-3} \\ \pm k_n = \pm(k-1)_{n-1}\pm(k-1)_n. \end{cases}$$

La somme de ces équations est

365. $$1-k_1+k_2-k_3\ldots.\pm k_n = \pm(k-1)_n$$

et $(k-1)_n$ étant $=\frac{(k-1,-1)^n}{(1,+1)^n}$, on a

366. $$(k-1,-1)^n = \pm(1,+1)^n[1-k_1+k_2-k_3\ldots.\pm k_n].$$

C'ela s'accorde comme on voit avec (362.), si dans cette dernière formule on suppose $n =$ un nombre entier.

VIII. La série (358.) étant généralement peu convergente et peu utile dans le calcul en nombres, si non dans le cas où l'exposant est un nombre entier, nous remettrons la recherche de sa convergence à la continuation prochaine de ce mémoire. Si l'exposant est un nombre entier, la série n'est pas infinie. Le nombre fini des termes, qu'elle a dans ce cas, donne exactement la valeur de la factorielle, et il ne s'agit pas de la convergence.

IX. Mais il se présente encore ici un cas remarquable. C'est celui où $u = x$ et qui donne les séries (360. 361. 362.). Dans ce cas on a, comme le font voir les expressions (347. et 348.), $(u-x, +x)^y = 0$ et $\triangle(u, +x)^y = -(u, +x)^y$, donc $\triangle^2(u, +x)^y = +(u, +x)^y$, $\triangle^3(u, +x)^y = -(u, +x)^y$ etc. c'est-à-dire que les différences de $(u, +x)^y$ de divers ordres ont ici la même valeur absolue que la quantité primitive et les signes alternativement positifs et négatifs. C'est donc ici un exemple des cas donc nous avons parlé (§. 22.) et il suit de ce qui y a été dit, que les formules (360. 361. 362.) n'ont pas lieu dans le cas actuel, toutes les fois que l'exposant y n'est pas un nombre entier. Elles n'ont lieu que si y est un nombre entier n. En effet on voit par ex. dans (362.) que cette formule, le facteur $1-k_1+k_2-k_3\ldots$ étant $=(1-1)^k=0$, donne $(k-1, -1)^y = 0$ pour une valeur quelconque positive de k, résultat évidemment faux. La série (362.) n'existe pas, si y n'est pas entier et au lieu d'une série développée on n'a dans ce cas que l'expression identique $(x+k, +x)^y = (x+k, +x)^y$.

41.

Second cas $z = +x$

I. Si dans la première équation fondamentale des facultés (38.) on écrit 1 et y au lieu de y et k elle donne en vertu de (40.)

$$367. \quad (u, +x)^{1+y} = u(u+x, +x)^y$$

et si dans la même équation on fait $k = 1$, on a

$$368. \quad (u, +x)^{1+y} = (u, +x)^y(u+yx).$$

Des équations (367. et 368.) on tire

$$369. \quad (u+x, +x)^y = (u, +x)^y \frac{u+yx}{u}$$

donc $\Delta(u,+x)$ étant dans le cas actuel $=(u+x,+x)^{\lambda}-(u,+x)^{\gamma}$, on a en vertu de (369.)

$$370.\quad \Delta(u,+x)^{\gamma}=(u,+x)^{\gamma}\left(\frac{u+\gamma x}{u}-1\right)=(u,+x)^{\gamma}\frac{\gamma x}{u}.$$

II. En mettant dans cette équation $u+x$ au lieu de u, on a, $\Delta(u+x,+x)^{\gamma}=(u+x,+x)^{\gamma}\frac{\gamma x}{u+x}$, et en substituant (369.), $\Delta(u+x,+x)^{\gamma}$ $=(u,+x)^{\gamma}\frac{\gamma x(u+\gamma x)}{u(u+x)}$; donc en déduisant (370.) $\Delta(u+x,+x)-\Delta(u,+x)$ $=(u,+x)^{\gamma}\frac{\gamma x}{u}\left(\frac{u+\gamma x}{u+x}-1\right)$, c'est-à-dire

$$371.\quad \Delta^{2}(u,+x)=(u,+x)^{\gamma}\frac{\gamma(\gamma-1)x^{2}}{u(u+x)}.$$

En continuant on trouve

$$372.\quad \Delta^{3}(u,+x)=(u,+x)^{\gamma}\frac{\gamma(\gamma-1)(\gamma-2)x^{3}}{u(u+x)(u+x)}$$

etc.

III. En substituant les expressions trouvées des différences de $(u,+x)^{\gamma}$ de différents ordres dans (346.), et en même tems la valeur supposée $+x$ de u, on aura

$$373.\quad (u+k,+x)^{\gamma}=(u,+x)^{\gamma}\left[1+\frac{k\gamma}{u}+\frac{k(k-x)}{2}\cdot\frac{\gamma(\gamma-1)}{u(u+x)}\right.$$
$$+\frac{k(k-x)(k-2x)}{2.3}\cdot\frac{\gamma(\gamma-1)(\gamma-2)}{u(u+x)(u+2x)}\cdots\cdot$$
$$\left.\cdots+\frac{k(k-x)(k-2x)\ldots(k-(n-1)x)}{2.3\ldots.n}\cdot\frac{\gamma(\gamma-1)(\gamma-2)\ldots.(\gamma-(n-1))}{u(u+x)(u+2x)\ldots(u+(n-1)x)}\right]+R_{n}.$$

Si l'exposant γ est un nombre entier, la série finit par le dernier terme écrit ci-dessus.

IV. Elle donne pour $u=x=1$:

$$374.\quad (k+1,+1)^{\gamma}=(1,+1)^{\gamma}[1+k_{1}\gamma_{1}+k_{2}\gamma_{2}+k_{3}\gamma_{3}\ldots.+k_{n}\gamma_{n}]+R_{n}.$$

V. Elle peut aussi être présentée sous la forme

$$375.\quad (u+k,+x)^{\gamma}=\frac{(u,+x)^{\gamma}}{2}\left[u+k\gamma+\frac{k(k-x)}{2}\cdot\frac{\gamma(\gamma-1)}{u+x}\right.$$
$$\left.+\frac{k(k-x)(k-2x)}{2.3}\cdot\frac{\gamma(\gamma-1)(\gamma-2)}{(u+x)(u+2x)}\cdots\cdot\right].$$

En écrivant y au lieu de $1+y$ dans (367.) on a $\frac{(u,+x)^y}{u} = (u+x,+x)^{y-1}$, donc

$$376. \quad (u+k,+x)^y = (u+x,+x)^{y-1}\left[u+ky+\frac{k(k-x)}{2}\cdot\frac{y(y-1)}{u+x}\cdots\right.$$
$$\left.\cdots+\frac{k(k-x)(k-2x)\cdots(k-(n-1)x)}{2.3\cdots n}\cdot\frac{y(y-1)\cdots(y-(n-1))}{(u+x)(u+2x)\cdots(u+(n-1)x)}\right]+R_n.$$

Si dans cette expression on fait $u=0$ et $x=1$, on a

$$(k,+1)^y = (1,+1)^{y-1}y\,[k_1+k_2(y-1)_1+k_3(y-1)_2\cdots+k_n(y-1)_{n-1}]+R_n,$$

ou bien, $(1,+1)^{y-1}y$ étant $(1,+1)^y$ (38.),

$$377. \quad (k,+1)^y = (1,+1)^y[k_1+k_2(y-1)_1+k_3(y-1]_2\cdots+k_n(y-1)_{n-1}]+R_n.$$

VI. Si dans (373.) on fait $u=x=-1$, on a

$$378. \quad (k-1,-1)^y = (-1)^y(1,+1)^y\left[1-ky_1+\frac{k(k+1)}{2}y_2-\frac{k(k+1)(k+2)}{2.3}y_3\cdots\right.$$
$$\left.\cdots\pm\frac{k(k+1)\cdots(k+n-1)}{2.3\cdots n}y_n\right]+R_n$$

ou bien, en mettant k au lieu de $k-1$ et divisant par $(1,+1)^y$,

$$379. \quad \frac{(k,-1)^y}{(1,+1)^y} = (-1)^y\left[1-(k-1)y_1+\frac{(k-1)k}{2}y_2-\frac{(k-1)k(k+1)}{2.3}y_3\cdots\right.$$
$$\left.\cdots\pm\frac{(k-1)k(k+1)(k+2)\cdots(k+n-2)}{2.3\cdots n}y_n\right]+R_n.$$

Puisque $\frac{(k,-1)^y}{(1,+1)^y}$ est l'expression du coëfficient binomial k_y, la série à droite dans (379.) donne le développement de ce coëfficient, même pour le cas où l'exposant y n'est pas un nombre entier.

L'expression (377.) donne une autre expression de ce coëfficient en y mettant $-k$ au lieu de $+k$, savoir

$$380. \quad \frac{(k,-1)^y}{(1,+1)^y} = (-1)^y\left[k-\frac{k(k+1)}{2}(y-1)_1+\frac{k(k+1)(k+2)}{2.3}(y-1)_2\cdots\right.$$
$$\left.\cdots\pm\frac{k(k+1)(k+2)\cdots(k+n-1)}{2.3\cdots n}(y-1)_{n-1}\right]+R_n.$$

VII. Quant à la convergence des séries trouvées dans ce paragraphe, nous en remettrons la recherche à une autre occasion de même que celle

des séries du paragraphe précédent et nous passerons au développement des facultés par le moyen de la variation de l'exposant.

Développement des facultés analytiques par la variation de l'exposant.

42.

I. En variant l'exposant y dans $(u,+x)^y$ la série générale de Taylor (78.) donne

$$381.\quad (u,+x)^{y+k} = (u,+x)^y + \frac{k}{\alpha}((u,+x)^{y+\alpha} - (u,+x)^y) + \frac{k(k-\alpha)}{2\alpha^2}((u,+x)^{y+2\alpha} - 2(u,+x)^{y+\alpha} + (u,+x)^y) \ldots + R_n .$$

Mais en vertu de la première équation fondamentale (38.) on a

$$382.\quad \begin{cases} (u,+x)^{y+\alpha} = (u,+x)^y (u+yx,+x)^\alpha , \\ (u,+x)^{y+2\alpha} = (u,+x)^y (u+yx,+x)^{2\alpha} , \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

donc ici

$$383.\quad \begin{cases} \Delta (u,+x)^y = (u,+x)^y [(u+yx,+x)^\alpha - 1] , \\ \Delta^2 (u,+x)^y = (u,+x)^y [(u+yx,+x)^{2\alpha} - 2(u+yx,+x)^\alpha + 1] . \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

et en substituant dans (381.)

$$384.\quad (u,+x)^{y+k} = (u,+x)^y \left[1 + \frac{k}{\alpha}((u+yx,+x)^\alpha - 1) + \frac{k(k-\alpha)}{2\alpha^2}((u+yx,+x)^{2\alpha} - 2(u+yx,+x)^\alpha + 1) \ldots \right] + R_n .$$

Si dans cette équation on fait $y=0$ et la quantité arbitraire $\alpha = 1$, elle donne

$$385.\quad (u,+x)^k = 1 + k_1\left((u,+x)^1 - 1\right) + k_2\left((u,+x)^2 - 2(u,+x)^1 + 1\right) + k_3\left((u,+x)^3 - 3(u,+x)^2 + 3(u,+x) - 1\right) \ldots\ldots \ldots\ldots + k_n\left((u,+x)^n - n_1(u,+x)^{n-1} + n_2(u,+x)^{n-2} \ldots \pm 1\right) + R_n .$$

II. Si dans l'expression (384.) on fait $x=0$ et $\alpha = 1$ elle donne

$$386.\quad u^{y+k} = u^y(1 + k_1(u-1) + k_2(u-1)^2 \ldots + k_n(u-1)^n) + R_n .$$

C'est comme on voit la série du binôme des puissances (144.).

Si dans (384.) on fait $x=0$, $\alpha=0$, on a

387. $$u^{\gamma+k}=u^{\gamma}\left[1+k\frac{u^0-1}{0}+\frac{k^2}{2}\left(\frac{u^0-1}{0}\right)^2\ldots.+\frac{k^n}{2.3\ldots.n}\left(\frac{u^0-1}{0}\right)^n\right]+R_n.$$

C'est comme on voit la série des quantités exponentielles (180.).

III. Si dans (385.) on fait $u=0$, toutes les factorielles qui entrent dans la série à droite, disparoissent et les coëfficiens de k_1, k_2, k_3, ... seréduisent alternativement à $+1$ et -1; donc la série (385.) donne dans ce cas

388. $$(0,+x)^k=1-k_1+k_2-k_3\ldots.\pm k_n.$$

La valeur de la série à droite est $(1-1)^k$ et cette quantité est toujours zéro, si k est positif. On voit de là, que la valeur d'une faculté analytique, dont la base est zéro, est toujours 0 toutes les fois que l'exposant est positif, même s'il n'est pas un nombre entier. Cela complète le théorème (§. 13. VII.).

IV. Quant à la convergence de la série (385.) nous en différerons la recherche. La série est ordinairement peu convergente. Mais on trouve à sa place, en variant l'exposant, une autre série toujours convergente, en prenant les logarithmes des facultés. Nous donnerons l'analyse complète de cette série dans le paragraphe suivant.

43.

I. En prenant les logarithmes naturels ou hyperboliques (§. 29. III.) de la faculté $(u,+x)^k$ et en variant l'exposant y, la série générale de Taylor donne

389. $$\log(u,+x)^{\gamma+k}=\log(u,+x)^{\gamma}+\frac{k}{\alpha}\left(\log(u,+x)^{\gamma+\alpha}-\log(u,+x)^{\gamma}\right)$$
$$+\frac{k(k-\alpha)}{2}\left(\log(u,+x)^{\gamma+2\alpha}-2\log(u,+x)^{\gamma+\alpha}+\log(u,+x)^{\gamma}\right)\ldots.+R_n.$$

Si dans cette expression on fait $\gamma=0$ et la quantité arbitraire $\alpha=1$, on a, $(u,+x)^0$ étant 1 (46.) et de là $\log(u,+x)^0=0$,

390. $$\log(u,+x)^k=k_1\log(u,+x)^1+k_2(\log(u,+x)^2-2\log(u,+x)^1)$$
$$+k_3(\log(u,+x)^3-3\log(u,+x)^2+3\log(u,+x)^1)\ldots.$$
$$\ldots.+k_n(\log(u,+x)^n-n_1\log(u,+x)^{n-1}+n_2\log(u,+x)^{n-2}\ldots.\pm n_{n-1}\log(u,+x)^1)+R_n.$$

II. Dans cette expression le premier terme du reste R_n qui, comme terme général, exprime tous les autres, est

$$391.\quad T_{n+1} = k_{n+1}\left[\log(u,+x)^{n+1} - (n+1)_1 \log(u,+x)^n + (n+1)_2 \log(u,+x)^{n-1} \ldots \pm (n+1)_n \log(u,+x)^1\right].$$

Suivant (44.), n étant un nombre entier, on a

$$392.\quad \begin{cases} (u,+x)^1 = u \\ (u,+x)^2 = u(u+x) \\ (u,+x)^3 = u(u+x)(u+2x) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ (u,+x)^{n+1} = u(u+x)(u+2x)\ldots(u+nx) \end{cases}$$

donc

$$393.\quad \begin{cases} \log(u,+x)^1 = \log u, \\ \log(u,+x)^2 = \log u + \log(u+x), \\ \log(u,+x)^3 = \log u + \log(u+x) + \log(u+2x), \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \log u,+x)^{n+1} = \log u + \log(u+x) + \log(u+2x) \ldots + \log(u+nx). \end{cases}$$

Cela étant substitué dans (391.) donne

$$394.\quad \frac{T_{n+1}}{k_{n+1}} = \log u + \log(u+x) + \log(u+2x) \ldots\ldots\ldots\ldots + \log(u+nx)$$
$$- (n+1)_1 \left(\log u + \log(u+x) + \log(u+2x) \ldots\ldots + \log(u+(n-1)x)\right)$$
$$+ (n+1)_2 \left(\log u + \log(u+x) + \log(u+2x) \ldots + \log(u+(n-2)x)\right)$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\mp (n+1)_{n-1}\left(\log u + \log(u+x)\right)$$
$$\pm (n+1)_n \log u$$

ou bien

$$395.\quad \frac{T_{n+1}}{k_{n+1}} = \log u\left(1 - (n+1)_1 + (n+1)_2 - (n+1)_3 \ldots\ldots\ldots\ldots \pm (n+1)_n\right)$$
$$+ \log(u+x)\left(1 - (n+1)_1 + (n+1)_2 - (n+1)_3 \ldots\ldots\ldots\ldots \pm (n+1)_{n-1}\right)$$
$$+ \log(u+2x)\left(1 - (n+1)_1 + (n+1)_2 - (n+1)_3 \ldots \pm (n+1)_{n-2}\right)$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$+ \log\left(u+(n-1)x\right)\left(1 - (n+1)_1\right)$$
$$+ \log(u+nx)$$

Mais en vertu de (365. §. 40. VII.) on a

$$396.\quad \begin{cases} 1 - (n+1)_1 = -n_1, \\ 1 - (n+1)_1 + (n+1)_2 = +n_2, \\ 1 - (n+1)_1 + (n+1)_2 - (n+1)_3 = -n_3, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ 1 - (n+1)_1 + (n+1)_2 - (n+1)_3 \ldots\ldots \pm (n+1)_n = \pm n_n = \pm 1, \end{cases}$$

donc

397. $$\frac{T_{n+1}}{k_{n+1}} = \log(u+nx) - n_1 \log(u+(n-1)x) + n_2 \log(u+(n-2)x) \ldots \pm \log u$$

ou bien

398. $$T_{n+1} = k_{n+1} \log \left[\frac{u+nx}{u+(n-1)x)^{n_1}} \cdot \frac{(u+(n-2)x)^{n_2}}{(u+(n-3)x)^{n_3}} \cdot \frac{(u+(n-4)x)^{n_4}}{(u+(n-5)x)^{n_5}} \cdots \right].$$

En substituant cela dans (390.) on trouve

399. $$\log(u.+x)^k = k_1 \log u + k_2 \log\left(\frac{u+x}{u}\right) + k_3 \log\left(\frac{(u+2x)u}{(u+x)^2}\right)$$
$$+ k_4 \log\left(\frac{(u+3x)(u+x)^3}{(u+2x)^3 u)}\right) \ldots + k_n \log\left(\frac{(u+(n-1)x)}{(u+(n-2)x)^{(n-1)_1}} \cdot \frac{(u+(n-3)x)^{(n-1)_2}}{(u+(n-4)x)^{(n-1)_3}} \cdots\right) + R_n.$$

C'est l'expression générale d'une faculté analytique trouvée par la variation de l'exposant.

III. Il s'agit maintenant de savoir si la série (399.) est convergente ou non.

Suivant le théorème général de la convergence de la série générale de Taylor (§. 21.) la série (399.) sera convergente, si aucun de ses termes n'est ni imaginaire ni infini, et si les valeurs que prend le premier terme T_{n+1} du reste R_n pour la plus grande et la plus petite valeur de $\frac{\triangle^{n+1} Fy}{\alpha^{n+1}}$ depuis y jusqu'à $y+k$, sont zéro toutes les deux pour $n=\infty$.

Si l'on suppose réelles toutes les quantités qui entrent dans (399.), aucun terme de la série ne sera infini. Donc les conditions de la convergence de la série se réduisent à celle, que les valeurs que prend T_{n+1} pour la plus grande et la plus petite valeur de $\frac{\triangle^{n+1} Fy}{\alpha^{n+1}}$ depuis y jusqu'à $y+k$ doivent être zéro pour $n=\infty$.

Ici la quantité $\frac{\triangle^{n+1} Fy}{\alpha^{n+1}}$ est celle qui dans le premier terme du reste R_n dans (389.) multiplie $\frac{k(k-\alpha)(k-2\alpha)\ldots(k-n\alpha)}{2.3\ldots(n+1)}$ savoir

400. $$\frac{\triangle^{n+1} Fy}{\alpha^{n+1}} = \log(u,+x)^{y+(n+1)\alpha} - (n+1)_1 \log(u,+x)^{y+n\alpha} + (n+1)_2 \log(u,+x)^{y+(n-1)\alpha} \ldots$$
$$\ldots \pm \log(u,+x)^y$$

ou bien, la quantité arbitraire α ayant été supposée $=1$.

401. $$\Delta^{n+1}Fy = \log(u,+x)^{y+n+1} - (n+1)_1 \log(u,+x)^{y+n} + (n+1)_2 \log(u,+x)^{y+n-1} \ldots . \\ \ldots . \pm \log(u,+x)^{y}.$$

Mais en vertu de la première équation fondamentale des facultés (38.) on a

402. $$\begin{cases} (u,+x)^{y+n+1} = (u,+x)^{y}(u+ky,+x)^{n+1}, \\ (u,+x)^{y+n} = (u,+x)^{y}(u+ky,+x)^{n}, \\ (u,+x)^{y+n-1} = (u,+x)^{y}(u+ky,+x)^{n-1}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

donc, en prenant les logarithmes,

$$\Delta^{n+1}Fy = (1-(n+1)_1+(n+1)_2 \ldots . \pm 1)\log(u,+x)^{y} \\ +\log(u+xy,+x)^{n+1} - (n+1)_1 \log(u+xy,+x)^{n} + (n+1)_2 \log(u+xy,+x)^{n-1} \ldots . \\ \ldots\ldots\ldots \pm (n+1)_n \log(u+xy,+x)^{1}$$

ou bien $1-(n+1)_1+(n+1)_2 \ldots . \pm 1$ étant $= (1-1)^{n+1} = 0$,

403. $$\Delta^{n+1}Fy = \log(u+xy,+x)^{n+1} - (n+1)_1 \log(u+xy,+x)^{n} + (n+1)_2 \log(u+xy,+x)^{n-1} \ldots . \\ \ldots\ldots\ldots \pm (n+1)_n \log(u+xy,+x)^{1}.$$

et il s'agit de la plus grande et de la plus petite valeur que cette quantité prend pour les différentes valeurs de y depuis y jusqu'à $y+k$, ou ce qui est la même chose pour les différentes valeurs de u depuis $u+xy$ jusqu'à $u+x(y+k)$.

Mais nous avons fait plus haut $y=0$. Donc il sagit de la plus grande et de la plus petite valeur que prend la quantité $\Delta^{n+1}Fy$ (403.) pour les différentes valeurs de u depuis u jusqu'à $u+kx$.

La valeur de $\Delta^{n+1}Fy$ (403.) pour $u=u$ est celle qui dans (391.) multiplie k_{n+1} et qui se réduit à celle (397.). Donc enfin il s'agit de connoître la valeur de T_{n+1} (398.) pour les valeurs différentes de u depuis u jusqu'à $u+kx$ et pour $n=\infty$. Si cette valeur est zéro, la série (399.) sera convergente, et elle ne le sera pas si T_{n+1} n'est pas zéro.

IV. L'expression de $\frac{T_{n+1}}{k_{n+1}}$ représentée sous la forme (398.) a évidemment un nombre égal de facteurs dans le numérateur et dans le dénominateur du logarithmande; car le nombre des facteurs dont se compose le numérateur est $1+n_2+n_4 \ldots .$, et celui des facteurs du dénominateur est $n_1+n_3+n_5 \ldots .$ et on a

$$1+n_2+n_4 \ldots . = n_1+n_3+n_5 \ldots .$$

puisque

404. $$1-n_1+n_2-n_3 \ldots . \pm n = (1-1)^n = 0.$$

Donc on peut diviser tous les logarithmandes des termes de $\frac{T_{n+1}}{k_{n+1}}$ (397.) par une quantité quelconque, sans diminuer ni augmenter la valeur de $\frac{T_{n+1}}{k_{n+1}}$, et au lieu de (397.) on peut écrire

405. $$\frac{T_{n+1}}{k_{n+1}} = \left(\log\frac{u}{x}+n\right) - n_1\log\left(\frac{u}{x}+n-1\right) + n_2\log\left(\frac{u}{x}+n-2\right)\dots \pm \log\frac{u}{x}$$

ou bien, si pour abréger on fait $\frac{u}{x}+n+1=\lambda$,

406. $$\frac{T_{n+1}}{k_{n+1}} = \log(\lambda-1) - n_1\log(\lambda-2) + n_2\log(\lambda-3)\dots \pm \log(\lambda-(n+1)).$$

Mais par la même raison on peut diviser tous les logarithmandes de cette expression par λ. Donc on peut aussi écrire

407. $$\frac{T_{n+1}}{k_{n+1}} = \log\left(1-\frac{1}{\lambda}\right) - n_1\log\left(1-\frac{2}{\lambda}\right) + n_2\log\left(1-\frac{3}{\lambda}\right)\dots \pm \log\left(1-\frac{n+1}{\lambda}\right).$$

Tous les logarithmandes de cette expression seront >0 et <1 si $\lambda > n+1$, c'est-à-dire si $\frac{u}{x}$ est positif, ou bien si u et x ont le même signe. Donc, sous cette condition, on pourra développer tous les logarithmes de la série (407.) suivant la formule (210. §. 29. VII.) qui, comme il y a été demontré, est convergente dans les cas actuels. On trouve

408. $$\begin{cases} \log\left(1-\frac{1}{\lambda}\right) = -\left(\frac{1}{\lambda}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\lambda^2}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{\lambda^3}+\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{\lambda^4}\dots+\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{\lambda^n}+\frac{1}{n+1}\cdot\frac{1}{\lambda^{n+1}}\dots\right), \\ \log\left(1-\frac{2}{\lambda}\right) = -\left(\frac{2}{\lambda}+\frac{1}{2}\cdot\frac{2^2}{\lambda^2}+\frac{1}{3}\cdot\frac{2^3}{\lambda^3}+\frac{1}{4}\cdot\frac{2^4}{\lambda^4}\dots+\frac{1}{n}\cdot\frac{2^n}{\lambda^n}+\frac{1}{n+1}\cdot\frac{2^{n+1}}{\lambda^{n+1}}\dots\right), \\ \log\left(1-\frac{3}{\lambda}\right) = -\left(\frac{3}{\lambda}+\frac{1}{2}\cdot\frac{3^2}{\lambda^2}+\frac{1}{3}\cdot\frac{3^3}{\lambda^3}+\frac{1}{4}\cdot\frac{3^4}{\lambda^4}\dots+\frac{1}{n}\cdot\frac{3^n}{\lambda^n}+\frac{1}{n+1}\cdot\frac{3^{n+1}}{\lambda^{n+1}}\dots\right), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \log\left(1-\frac{n}{\lambda}\right) = -\left(\frac{n}{\lambda}+\frac{1}{2}\cdot\frac{n^2}{\lambda^2}+\frac{1}{3}\cdot\frac{n^3}{\lambda^3}+\frac{1}{4}\cdot\frac{n^4}{\lambda^4}\dots+\frac{1}{n}\cdot\frac{n^n}{\lambda^n}+\frac{1}{n+1}\cdot\frac{n^{n+1}}{\lambda^{n+1}}\dots\right), \\ \log 1-\frac{n+1}{\lambda} = -\left(\frac{n+1}{\lambda}+\frac{1}{2}\cdot\frac{(n+1)^2}{\lambda^2}+\frac{1}{3}\cdot\frac{(n+1)^3}{\lambda^3}+\frac{1}{4}\cdot\frac{(n+1)^4}{\lambda^4}\dots\right. \\ \qquad\qquad \left.\dots+\frac{1}{n}\cdot\frac{(n+1)^n}{\lambda^n}+\frac{1}{n+1}\cdot\frac{(n+1)^{n+1}}{\lambda^{n+1}}\right). \end{cases}$$

En substituant ces séries dans (407.) on a

$$409.\quad -\frac{T_{n+1}}{k_{n+1}} = \frac{1}{\lambda}\left(1 - n_1 2 + n_2 3 - n_3 4 \ldots\ldots\ldots \mp n_{n-1}.n \pm n+1\right)$$
$$+\frac{1}{2\lambda^2}\left(1 - n_1 2^2 + n_2 3^2 - n_3 4^2 \ldots\ldots\ldots \mp n_{n-1}.n^2 \pm (n+1)^2\right)$$
$$+\frac{1}{3\lambda^3}\left(1 - n_1 2^3 + n_2 3^3 - n_3 4^3 \ldots\ldots\ldots \mp n_{n-1}.n^3 \pm (n+1)^3\right)$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$+\frac{1}{n\lambda^n}\left(1 - n_1 2^n + n_2 3^n - n_3 4^n \ldots\ldots\ldots \mp n_{n-1}.n^n \pm (n+1)^n\right)$$
$$+\frac{1}{(n+1)\lambda^{n+1}}\left(1 - n_1 2^{n+1} + n_2 3^{n+1} - n_3 4^{n+1} \ldots\ldots \mp n_{n-1}.n^{n+1} \pm (n+1)^{n+1}\right)$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Ici les séries à droite, comme il est aisé de voir, expriment les n^{mes} différences des nombres naturels 1, 2, 3, ..., $n+1$ et de leur différentes puissances à l'infini. Les valeurs de ces différences jusqu'à le $(n-1)^{\text{mes}}$ sont, comme on sait, zéro, c'est-à-dire on a

$$410.\quad 1 - n_1 2^\mu + n_2 3^\mu - n_3 4^\mu \ldots\ldots \pm (n+1)^\mu = 0$$

pour toutes les valeurs de μ depuis 1 jusqu'à $n-1$. Donc l'expression (409.) se réduit à

$$411.\quad -\frac{T_{n+1}}{k_{n+1}} = \frac{1}{n\lambda^n}\left(1 - n_1 2^n + n_2 3^n - n_3 4^n \ldots\ldots \mp n_{n+1} n^n \pm (n+1)^n\right)$$
$$+\frac{1}{(n+1)\lambda^{n+1}}\left(1 - n_1 2^{n+1} + n_2 3^{n+1} - n_3 4^{n+1} \ldots\ldots \mp n_{n+1} n^{n+1} \pm (n+1)^{n+1}\right)$$
$$+\frac{1}{(n+2)\lambda^{n+2}}\left(1 - n_1 2^{n+2} + n_2 3^{n+2} - n_3 4^{n+2} \ldots\ldots \mp n_{n+1} n^{n+2} \pm (n+1)^{n+2}\right)$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Il est vrai qu'ici les séries à droite ne sont pas zéro; mais leurs valeurs seront nécessairement plus petites que celles de leurs derniers termes $(n+1)^n$, $(n+1)^{n+1}$, $(n+1)^{n+2}$, ... car toutes les différences de n^{mes}, $(n+1)^{\text{mes}}$, $(n+2)^{\text{mes}}$ etc. puissances des nombres naturels 1, 2, 3, ... $n+1$ sont évidemment plus petites que la puissance du plus haut nombre elle même, puisqu'on les trouve toutes en soustrayant des nombres plus petits des nombres plus grands, et qu'elles sont d'ailleurs toutes positives. Donc la valeur absolue de $\frac{T_{n+1}}{k_{n+1}}$ ne pourra être plus grande que celle de la quantité

$$\frac{1}{n\lambda^n}(n+1)^n+\frac{1}{(n+1)\lambda^{n+1}}(n+1)^{n+1}+\frac{1}{(n+2)\lambda^{n+2}}(n+1)^{n+2}\ldots.$$

c'est-à-dire de la quantité

$$412.\quad \frac{1}{n}\left(\frac{n+1}{\lambda}\right)^n+\frac{1}{n+1}\left(\frac{n+1}{\lambda}\right)^{n+1}+\frac{1}{n+2}\left(\frac{n+1}{\lambda}\right)^{n+2}\ldots.$$

Mais cette quantité, de son côté, n'est pas plus grande que

$$413.\quad \frac{1}{n}\left(\frac{n+1}{\lambda}\right)^n\left[1+\frac{n+1}{\lambda}+\left(\frac{n+1}{\lambda}\right)^2+\left(\frac{n+1}{\lambda}\right)^3\ldots.\right]=\frac{1}{n}\left(\frac{n+1}{\lambda}\right)^n\frac{1}{1-\frac{n+1}{\lambda}}$$

et cette dernière quantité est évidemment zéro pour $n=\infty$, $\frac{n+1}{\lambda}$ étant <1 suivant l'hypothèse. Donc on a

$$414.\quad \frac{T_{n+1}}{k_{n+1}}=0 \text{ pour } n=\infty.$$

Mais on sait que k_{n+1} est zéro pour $n=\infty$ si k est >-1 (§. 26.); donc on a

$$415.\quad T_{n+1}=0 \text{ pour } n=\infty$$

sous condition que u et x ont des signes égaux et que k soit plus grand que -1. Enfin, puisqu'on a également $T_{n+1}=0$ pour une valeur quelconque de u, les deux valeurs de T_{n+1} (III.) qui déterminent la convergence de la série seront zéro en même tems, n étant supposé ∞. Donc la série (399.) sera convergente sous les conditions que nous venons d'énoncer.

V. Les logarithmes qui entrent dans la série (399.) ont été supposés de ceux qu'on appelle naturels ou hyperboliques. Mais puisque les termes de la série sans exception contiennent tous également des logarithmes, on pourra multiplier toute la série par le module de tel autre système de logarithmes qu'on voudra. Mais par là les logarithmes naturels se réduisent à d'autres du nouveau système. Donc la série (399.) aura également lieu quel que soit le système d'où l'on tire les logarithmes qu'on veut introduire.

VI. Le terme à gauche dans (399.) et le premier terme à droite peuvent être mis sous la forme

$$\log\left(\left(\frac{u}{x},+1\right)^k x^k\right)=\log\left(\frac{u}{x},+1\right)^k+k\log x \text{ et } k\log\left(\frac{u}{x}.x\right)=k\log\frac{u}{x}+k\log x.$$

Ces facteurs des logarithmandes de tous les autres termes à droite, comme nous l'avons vu plus haut, peuvent être divisés par x en haut et en bas, sans changer par là la valeur des termes. L'effet de cette dernière opération est, que partout $\frac{u}{x}$ prend la place de u et 1 la place de x. Donc, si au lieu de $\frac{u}{x}$ on veut écrire λ, l'expression (399.) se réduit à

$$416.\quad \log(\lambda,+1)^k = k_1\log\lambda + k_2\log\frac{\lambda+1}{\lambda} + k_3\log\frac{(\lambda+2)\lambda}{(\lambda+1)^2} + k_4\log\frac{(\lambda+3)(\lambda+1)^3}{(\lambda+2)^3\lambda} \ldots.$$
$$\ldots. + k_n\log\left(\frac{\lambda+n-1}{(\lambda+n-2)^{(n-1)_1}}\cdot\frac{(\lambda+n-3)^{(n-1)_2}}{(\lambda+n-4)^{(n-1)_3}}\ldots.\right) + R_n$$

et cette expression, comme l'on voit par la manière dont la réduction de (399.) a été exécutée, est aussi générale que celle (399.).

Si l'on fait $\lambda = 1$ dans (416.) on trouve

$$417.\quad \log(1,+1)^k = k_2\log 2 + k_3\log\tfrac{3}{4} + k_4\log\tfrac{3^2}{2^7} + k_5\log\tfrac{3^6}{4^5 9^5}\ldots. + R_n.$$

VII. Les coëfficiens de k_n dans (399. et 416.) n'étant autre chose que les différences $(n-1)^{\text{mes}}$ des logarithmes de $u+(n-1)x$, $u+(n-2)x$, ... u et de $\lambda+n-1$, $\lambda+n-2$, ... λ, les séries (399. 416. et 417.) pourront aussi être présentées sous la forme suivante

$$418.\quad \log(u,+x)^k$$
$$= k_1\log u + k_2\Delta\log(u+x) + k_3\Delta^2\log(u+2x)\ldots. + k_n\Delta^{n-1}\log(u+(n-1)x) + R_n,$$

$$419.\quad \log(\lambda,+1)^k$$
$$= k_1\log\lambda + k_2\Delta\log(\lambda+1) + k_3\Delta^2\log(\lambda+2)\ldots.. + k_n\Delta^{n-1}\log(\lambda+n-1) + R_n,$$

$$420.\quad \log(1,+1)^k$$
$$= \quad k_2\Delta\log 2 \quad + k_3\Delta^2\log 3\ldots\ldots\ldots + k_n\Delta^{n-1}\log n + R_n.$$

On pourra très commodément calculer les logarithmes des facultés suivant ces dernières expressions, car il n'y a qu'à prendre les différences successives des logarithmes des nombres u, $u+x$, $u+2x$, ... $u+(n-1)x$, ou de celles λ, $\lambda+1$, $\lambda+2$, ... $\lambda+n-1$, ou bien de 1, 2, 3, ... n et à les multiplier par les coëfficiens binomiaux k_1, k_2, k_3, ... k_n.

VIII. Il est vrai qu'en faisant le calcul de $(1,+1)^k$ suivant la formule (420.) on trouvera que la série n'est que peu convergente, puisque les différences des logarithmes des premiers nombres naturels 1, 2, 3....

ne vont en diminuant que très lentement. Mais néanmoins, en partant de la série (419.), on pourra trouver le logarithme de la faculté $(1,+1)^k$ par une expression aussi convergente qu'on voudra, car cette série sera très convergente si λ est un nombre assez grand. Supposons donc qu'on ait à calculer $(\lambda,+1)^k$ pour une valeur arbitraire assez grande de λ, la formule (52.) donnera, en y faisant $u=x=1$,

$$\frac{(1+k,+1)^y}{(1,+1)^y}=\frac{(1+y,+1)^k}{(1,+1)^k},$$

et en faisant $1+y=\lambda$,

$$\frac{(1+k,+1)^{\lambda-1}}{(1,+1)^{\lambda-1}}=\frac{(\lambda,+1)^k}{(1,+1)^k}.$$

De là on tire

421. $$(1,+1)^k=(\lambda,+1)^k\frac{(1,+1)^{\lambda-1}}{(1+k,+1)^{\lambda-1}}.$$

Ici λ est un nombre entier arbitraire. Donc les quantités $(1,+1)^{\lambda-1}$ et $(1+k,+1)^{\lambda-1}$ pourront être calculées par la seule multiplication. Donc ayant trouvé $(\lambda,+1)^k$ par la série (419.) on aura sur le champ $(1,+1)^k$.

Expressions des fonctions angulaires par les facultés.

44.

Ces expressions, que nous citerons comme du nombre de ces applications des facultés analytiques qui se présentent les premières, se tirent des équations (340. 341,) comme suit.

Ces équations donnent

422. $$\sin x=x.\frac{(\pi-x)(2\pi-x)(3\pi-x)\ldots(\pi+x)(2\pi+x)(3\pi+x)\ldots}{\pi.2\pi.3\pi\ldots\pi.2\pi.3\pi\ldots}$$ et

423. $$\cos x=\frac{(\pi-2x)(3\pi-2x)(5\pi-2x)\ldots(\pi+2x)(3\pi+2x)(5\pi+2x)\ldots}{\pi.3\pi.5\pi\ldots\pi.3\pi.5\pi\ldots}$$

donc, en faisant usage de la notation des facultés,

424. $$\sin x=x.\frac{(\pi-x,+\pi)^n(\pi+x,+\pi)^n}{(\pi,+\pi)^n(\pi,+\pi)^n}$$

425. $$\cos x=\frac{(\pi-2x,+2\pi)^n(\pi+2x,+2\pi)^n}{(\pi,+2\pi)^n(\pi,+2\pi)^n}$$

pour $n=\infty$.

Mais en vertu des expression (57. et 39.) on a

426. $(\pi - x, +\pi)^n = \dfrac{(1,+1)^n n^{-\frac{x}{\pi}} . \pi^n}{(1,+1)^{-\frac{x}{\pi}}}, \quad (\pi + x, +\pi)^n = \dfrac{(1,+1)^n n^{\frac{x}{\pi}} \pi^n}{(1,+1)^{\frac{x}{\pi}}},$

427. $(\pi - 2x, +2\pi)^n = \dfrac{(1,+1)^n n^{-\frac{x}{\pi}-\frac{1}{2}} \pi^n}{(1,+1)^{-\frac{x}{\pi}-\frac{1}{2}}}, \quad (\pi + 2x, +2\pi)^n = \dfrac{(1,+1)^n n^{\frac{x}{\pi}-\frac{1}{2}} \pi^n}{(1,+1)^{\frac{x}{\pi}-\frac{1}{2}}},$

428. $(\pi, +\pi)^n = (1,+1)^n \pi^n, \qquad (\pi, +2\pi)^n = \dfrac{(1,+1)^n n^{-\frac{1}{2}} \pi^n}{(1,+1)^{-\frac{1}{2}}},$

En substituant cela dans (424. 425.), on a

429. $$\sin x = \frac{x}{(1,+1)^{-\frac{x}{\pi}} (1,+1)^{+\frac{x}{\pi}}},$$

430. $$\cos x = \frac{(1,+1)^{-\frac{1}{2}} (1,+1)^{+\frac{1}{2}}}{(1,+1)^{-\frac{x}{\pi}-\frac{1}{2}} (1,+1)^{+\frac{x}{\pi}-\frac{1}{2}}},$$

Voilà les expressions connues de $\sin x$ et $\cos x$ par les facultés analytiques. On les tire, comme on voit, des équations fondamentales sans la moindre difficulté.

Puisque suivant la première équation fondamentale des facultés (38.)

$(1+1)^{-\frac{1}{2}-\frac{x}{\pi}} = (1,+1)^{-\frac{1}{2}} (\frac{1}{2}, +1)^{-\frac{x}{\pi}}$ et $(1,+1)^{-\frac{1}{2}+\frac{x}{\pi}} = (1,+1)^{-\frac{1}{2}} (\frac{1}{2}, +1)^{+\frac{x}{\pi}}$

l'expression de $\cos x$ (430.) peut aussi être présentée sous la forme:

431. $$\cos x = \frac{1}{(\frac{1}{2}, +1)^{-\frac{x}{\pi}} (\frac{1}{2}, +1)^{+\frac{x}{\pi}}}.$$

En vertu de $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$, $\cos x = \dfrac{\sin 2x}{2 \sin x}$ l'expression (430.) donne aussi

432. $$\cos x = \frac{(1,+1)^{-\frac{x}{\pi}} (1,+1)^{+\frac{x}{\pi}}}{(1,+1)^{-\frac{2x}{\pi}} (1,+1)^{+\frac{2x}{\pi}}}$$

Si l'on fait $x = \frac{1}{2}\pi$ on a $\sin x = 1$, donc en vertu de (429.)

$$1 = \frac{\frac{1}{2}\pi}{(1,+1)^{-\frac{1}{2}} (1,+1)^{+\frac{1}{2}}}$$

et de là

433. $$\pi = 2(1,+1)^{-\frac{1}{2}} (1,+1)^{+\frac{1}{2}}.$$

Mais $(1,+1)^{+\frac{1}{2}} = (1,+1)^{-\frac{1}{2}} (\frac{1}{2}, +1) = \frac{1}{2}(1,+1)^{-\frac{1}{2}}$ (38. 40.), donc $(1,+1)^{-\frac{1}{2}} = 2(1,+1)^{\frac{1}{2}}$ et suivant (433.) $\pi = 4((1,+1)^{\frac{1}{2}})^2$ et de là

$$434. \quad \pi^{\frac{1}{2}} = 2(1,+1)^{\frac{1}{2}},$$

et également $\pi = 2(1,+1)^{-\frac{1}{2}}.\frac{1}{2}(1,+1)^{-\frac{1}{2}} = (1,+1)^{-\frac{1}{2}}$, donc

$$435. \quad \pi^{\frac{1}{2}} = (1,+1)^{-\frac{1}{2}}.$$

Application des expressions des fonctions angulaires par les facultés à un cas particulier de l'équation (66.).

45.

Nous donnerons cette application qui se présente comme une des premières des expressions (§. 44.).

I. Dans le cas où y est un nombre entier, l'équation (66.), en vertu de son développement (67.), peut être écrite comme suit:

$$436. \quad (u,+x)^{yk} = (u,+yx)^k(u+x,+yx)^k(u+2x,+yx)^k \ldots (u+(y-1)x,+yx)^k.$$

Mais toute faculté pouvant être réduite par l'équation (55.) à d'autres, dont la base et la différence sont l'unité, nous nous bornerons au cas où $u = x = 1$.

Dans ce cas l'équation (436.) donne

$$437. \quad (1,+1)^{yk} = (1,+y)^k(2,+y)^k(3,+y)^k \ldots (y,+y)^k.$$

En vertu de l'équation (55.) on a

$$438. \quad \left\{ \begin{array}{l} (1,+y)^k = y^k \dfrac{(1,+1)^{\frac{1}{y}-1+k}}{(1,+1)^{\frac{1}{y}-1}}, \\ (2,+y)^k = y^k \dfrac{(1,+1)^{\frac{2}{y}-1+k}}{(1,+1)^{\frac{2}{y}-1}}, \\ (3,+y)^k = y^k \dfrac{(1,+1)^{\frac{3}{y}-1+k}}{(1,+1)^{\frac{3}{y}-1}}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ (y,+y)^k = y^k \dfrac{(1,+1)^{\frac{y}{y}-1+k}}{(1,+1)^{\frac{y}{y}-1}} = y^k(1,+1)^k. \end{array} \right.$$

donc, en substituant ces expressions dans (437.), le nombre des facteurs à droite étant y, on a

$$439.\quad (1,+1)^{yk} = y^{yk}\,\frac{(1,+1)^{\frac{1}{y}-1+k}\cdot(1,+1)^{\frac{2}{y}-1+k}\cdot(1,+1)^{\frac{3}{y}-1+k}\cdot\ldots\cdot(1,+1)^{k}}{(1,+1)^{\frac{1}{y}-1}\cdot(1,+1)^{\frac{2}{y}-1}\cdot(1,+1)^{\frac{3}{y}-1}\cdot\ldots\cdot(1,+1)^{0}}.$$

Dans cette expression les exposans des facultés à droite en haut et en bas vont en croissant, et chaque exposant surpasse celui qui le précède de la quantité $\frac{1}{y}$. Donc en mettant les facteurs dans l'ordre inverse, on a

$$440.\quad (1,+1)^{yk} = y^{yk}\,\frac{(1,+1)^{k}(1,+1)^{k-\frac{1}{y}}(1,+1)^{k-\frac{2}{y}}\cdot\ldots\cdot(1,+1)^{k-\frac{y-1}{y}}}{(1,+1)^{0}(1,+1)^{-\frac{1}{y}}(1,+1)^{-\frac{2}{y}}\cdot\ldots\cdot(1,+1)^{-\frac{y-1}{y}}}.$$

II. Cela posé, mettant dans (429.) πx au lieu de x, on a

$$441.\quad \sin\pi x = \frac{\pi x}{(1,+1)^{x-x}(1,+1)^{+x}}.$$

Mais en vertu de la première équation fondamentale des facultés (38.) on a

$$(1,+1)^{x-1} = (1,+1)^{x}(1+x,+1)^{-1} = \frac{(1,+1)^{x}}{(1+x-1,+1)^{1}}\ (47.) = \frac{(1,+1)^{x}}{x}\ (40.),$$

donc $(1,+1)^{x} = x(1,+1)^{x-1}$, et en substituant dans (441.)

$$442.\quad \sin\pi x = \frac{\pi}{(1,+1)^{x-1}(1,+1)^{-x}}$$

ou bien

$$443.\quad (1,+1)^{x-1}(1,+1)^{-x} = \frac{\pi}{\sin\pi x}.$$

En faisant dans cette équation successivement $x = \frac{1}{y}, \frac{2}{y}, \frac{3}{y}, \ldots$, elle donne

$$444.\quad \begin{cases} (1,+1)^{-\frac{1}{y}}(1,+1)^{-\frac{y-1}{y}} = \dfrac{\pi}{\sin\dfrac{\pi}{y}}, \\ (1,+1)^{-\frac{2}{y}}(1,+1)^{-\frac{y-2}{y}} = \dfrac{\pi}{\sin\dfrac{2\pi}{y}}, \\ (1,+1)^{-\frac{3}{y}}(1,+1)^{-\frac{y-3}{y}} = \dfrac{\pi}{\sin\dfrac{3\pi}{y}}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

III. Ces expressions pourront être appliquées aux facteurs du dénominateur de la partie à droite de l'équation (440.).

Le nombre de ces facteurs, excepté le premier qui est l'unité, est $y-1$. Donc si y est impair, ce nombre est pair et $=\frac{y-1}{2}$; si y est pair, il est impair; dans ce cas celui au milieu est $(1,+1)^{-\frac{1}{2}}=\pi^{\frac{1}{2}}$ (435.) et le nombre des autres facteurs est $\frac{y-2}{2}$.

Donc le dénominateur de la partie à droite de l'équation (440.) en vertu de (444.) peut être exprimé comme suit

445. $$(1,+1)^{-\frac{1}{y}}(1,+1)^{-\frac{2}{y}}(1,+1)^{-\frac{3}{y}}\ldots\ldots(1,+1)^{-\frac{y-1}{y}}=\frac{\pi}{\sin\frac{\pi}{y}}\cdot\frac{\pi}{\sin\frac{2\pi}{y}}\cdot\frac{\pi}{\sin\frac{3\pi}{y}}\cdot\ldots\cdot\frac{\pi}{\sin\frac{(y-1)\pi}{2y}}$$

si y est impair, et

446. $$(1,+1)^{-\frac{1}{y}}(1,+1)^{-\frac{2}{y}}(1,+1)^{-\frac{3}{y}}\ldots\ldots(1,+1)^{-\frac{y-1}{y}}=\frac{\pi}{\sin\frac{\pi}{y}}\cdot\frac{\pi}{\sin\frac{2\pi}{y}}\cdot\frac{\pi}{\sin\frac{3\pi}{y}}\cdot\ldots\cdot\frac{\pi}{\sin\frac{(y-2)\pi}{2y}}\pi^{\frac{1}{2}}$$

si y est pair.

VI. Mais en vertu des équations (332. 333.) on a

447. $$\sin\frac{\pi}{y}.\sin\frac{2\pi}{y}.\sin\frac{3\pi}{y}\ldots\ldots\sin\frac{(y-1)\pi}{2y}=\frac{y^{\frac{1}{2}}}{2^{\frac{y-1}{2}}}$$ si y est impair, et

448. $$\sin\frac{\pi}{y}.\sin\frac{2\pi}{y}.\sin\frac{3\pi}{y}\ldots\ldots\sin\frac{(y-2)\pi}{2y}=\frac{y^{\frac{1}{2}}}{2^{\frac{y-1}{2}}}$$ si y est pair.

Donc les expressions (445. 446.), dont les facteurs à droite sont au nombre $\frac{y-1}{2}$ dans la première, et au nombre de $\frac{y-2}{2}$ dans la seconde, donnent

$$(1,+1)^{-\frac{1}{y}}(1,+1)^{-\frac{2}{y}}(1,+1)^{-\frac{3}{y}}\ldots\ldots(1,+1)^{-\frac{y-1}{y}}=\frac{\pi^{\frac{y-1}{2}}2^{\frac{y-1}{2}}}{y^{\frac{1}{2}}}=\frac{(2\pi)^{\frac{y-1}{2}}}{y^{\frac{1}{2}}}$$ si y est impair, et

$$(1,+1)^{-\frac{1}{y}}(1,+1)^{-\frac{2}{y}}(1,+1)^{-\frac{3}{y}}\ldots\ldots(1,+1)^{-\frac{y-1}{y}}=\frac{\pi^{\frac{y-2}{2}}\pi^{\frac{1}{2}}.2^{\frac{y-1}{2}}}{y^{\frac{1}{2}}}=\frac{(2\pi)^{\frac{y-1}{2}}}{y^{\frac{1}{2}}}$$ si y est pair;

d'où l'on voit, que quelque nombre entier que soit y, pair ou impair, on a

449. $$1,+1)^{-\frac{1}{y}}(1,+1)^{-\frac{2}{y}}(1,+1)^{-\frac{3}{y}}\ldots\ldots(1,+1)^{-\frac{y-1}{y}}=\frac{(2\pi)^{\frac{y-1}{2}}}{y^{\frac{1}{2}}}.$$

En substituant cette expression dans (440.) on a

450. $$(1,+1)^{yk}=\frac{y^{yk+\frac{1}{2}}}{(2\pi)^{\frac{y-1}{2}}}(1,+1)^{k}(1,+1)^{k-\frac{1}{y}}(1,+1)^{k-\frac{2}{y}}\ldots\ldots(1,+1)^{k-\frac{y-1}{y}}.$$

Voilà l'expression d'une faculté $(1,+1)^{yk}$ dont l'exposant yk est un multiple entier de k, par le produit d'autres facultés dont les exposans ne contiennent que k suivi de fractions dépendantes de y.

Cette expression est celle que Mr. Legendre a trouvée par une autre voie dans son traité des fonctions elliptiques tom. 2. page 444. où l'expression Γx s'accorde avec notre $(1,+1)^{x-1}$, comme on le voit par la formule 2. page 416. du même ouvrage. La formule de cet illustre auteur (page 444.), écrite avec nos signes, est la suivante

$$451.\quad (1,+1)^{x-1}(1,+1)^{x-1+\frac{1}{n}}(1,+1)^{x-1+\frac{2}{n}}\ldots(1,+1)^{x-1+\frac{n-1}{n}}=(1,+1)^{nx-1}(2\pi)^{\frac{n-1}{2}}n^{\frac{1}{2}-nx}.$$

Si dans cette expression on met d'abord $x+\frac{1}{n}$ au lieu de x et qu'on écrive les facteurs à gauche dans l'ordre inverse, elle se reduit à

$$452.\quad (1,+1)^{x}(1,+1)^{x-\frac{1}{n}}(1,+1)^{x-\frac{2}{n}}\ldots(1,+1)^{x-\frac{n-1}{n}}=(1,+1)^{nx}(2\pi)^{\frac{n-1}{2}}n^{-\frac{1}{2}-nx}$$

et cette expression, en y écrivant k et y au lieu de x et n, s'accorde parfaitement avec (450.). Cela offre une preuve à posteriori de l'exactitude de la formule générale (66. ou 67. ou 436.) de laquelle nous sommes partis.

V. Nous donnerons encore une autre démonstration de la formule (450.) sans le secours de la formule générale (436.). Elle sera la troisième du théorème, celle de Mr. Legendre étant la première.

Si fx et φx désignent des fonctions quelconques de x et qu'on ait l'équation

$$453.\quad \frac{f(x+\alpha)}{fx}=\frac{\varphi(x+\alpha)}{\varphi x},$$

où α est une quantité quelconque, qui peut aussi être zéro, on peut en conclure, comme on sait, que φx ne peut différer de fx que par un facteur A independant de x, de sorte qu'on a

$$454.\quad fx=A\varphi x.$$

VI. Cela posé, nous ferons remarquer qu'en vertu de la première équation fondamentale des facultés (38.) on a

$$(1,+1)^{k-1}=(1,+1)^{k}(1+k,+1)^{-1},$$

donc, $(1+k,+1)^{-1}$ en vertu de l'équation (47.) étant $=\frac{1}{(1+k-1,+1)^{k}}=\frac{1}{k}$:

$$455.\quad (1,+1)^{k-1}=\frac{(1,+1)^{k}}{k}.$$

Cela donne, en écrivant yk au lieu de k,

$$456. \quad (1,+1)^{yk-1} = \frac{(1,+1)^{yk}}{yk}.$$

En divisant (455.) par (456.) on a

$$\frac{(1,+1)^{k-1}}{(1,+1)^{yk-1}} = \frac{(1,+1)^{k}.y}{(1,+1)^{yk}},$$

ou bien

$$457. \quad \frac{(1,+1)^{k}}{(1,+1)^{k-1}} = \frac{(1,+1)^{yk}y^{-1}}{(1,+1)^{yk-1}}.$$

Si dans cette expression on multiplie à gauche le numérateur et le dénominateur par $(1,+1)^{k-\frac{1}{y}}(1,+1)^{k-\frac{2}{y}}\ldots.(1,+1)^{k-\frac{y-1}{y}}$, on aura

$$458. \quad \frac{(1,+1)^{k}\ (1,+1)^{k-\frac{1}{y}}(1,+1)^{k-\frac{2}{y}}\ldots.(1,+1)^{k-\frac{y-1}{y}}}{(1,+1)^{k-\frac{1}{y}}(1,+1)^{k-\frac{2}{y}}(1,+1)^{k-\frac{3}{y}}\ldots.(1,+1)^{k-1}} = \frac{(1,+1)^{ky}y^{-1}}{(1,+1)^{yk-1}}.$$

Dans cette équation le numérateur à gauche se tire précisement du dénominateur en mettant dans ce dernier $k+\frac{1}{y}$ au lieu de k. A droite le numérateur seroit également produit du dénominateur par cette même substitution, si le facteur y^{-1} n'y étoit pas.

Pour faire sortir exactement le numérateur à droite du dénominateur par la substitution de $k+\frac{1}{y}$ au lieu de k, il n'y a qu'à multiplier à droite, en haut et en bas, par un facteur $p=\psi k$ tel, qu'en y mettant $k+\frac{1}{y}$ au lieu de k, on ait $\frac{\psi\left(k+\frac{1}{y}\right)}{\psi k}=y^{-1}$. On voit sans peine que ce facteur sera de la forme

$$459. \quad \psi k = y^{-yk+\beta},$$

où β est une quantité indéterminée, indépendante de y, car en y mettant $k+\frac{1}{y}$ au lieu de k, on a

$$\psi\left(k+\frac{1}{y}\right) = y^{-yk-1+\beta} \quad \text{et} \quad \frac{\psi\left(k+\frac{1}{y}\right)}{\psi k} = y^{-1}.$$

Donc en écrivant au lieu de l'équation (458.) celle ci;

$$460. \quad \frac{(1,+1)^{k}\ (1,+1)^{k-\frac{1}{y}}(1,+1)^{k-\frac{2}{y}}\ldots.(1,+1)^{k-\frac{y-1}{y}}}{(1,+1)^{k-\frac{1}{y}}(1,+1)^{k-\frac{2}{y}}(1,+1)^{k-\frac{3}{y}}\ldots.(1,+1)^{k-1}}$$
$$= \frac{(1,+1)^{yk}.y^{-yk-1+\beta}}{(1,+1)^{yk-1}.y^{-yk+\beta}} = \frac{(1,+1)^{yk}y^{-yk-1}}{(1,+1)^{yk-1}y^{-yk}},$$

qui est identiquement la même chose, on a une équation où les numérateurs à gauche et à droite se tirent précisément des dénominateurs en mettant dans ces derniers $k+\frac{1}{y}$ au lieu de k.

Donc cette équation sera précisément dans le cas de l'équation (453.) et le lemme (V.) y sera applicable.

VII. Suivant ce lemme les dénominateurs à gauche et à droite, et par suite aussi les numérateurs, ne différeront l'un de l'autre que par un facteur A indépendant de y; donc on aura

$$461.\quad (1,+1)^k(1,+1)^{k-\frac{1}{y}}(1,+1)^{k-\frac{2}{y}}\ldots.(1,+1)^{k-\frac{y-1}{y}} = (1,+1)^{yk}.y^{-yk-1}.A.$$

Faisant dans cette équation $k=0$, elle donne

$$462.\quad (1,+1)^{-\frac{1}{y}}(1,+1)^{-\frac{2}{y}}\ldots.(1,+1)^{-\frac{y-1}{y}} = y^{-1}.A.$$

Mais en vertu de l'expression (449.), qu'on tire du théorème de Moivre combiné avec les résultats que donne la théorie des facultés appliquée aux fonctions angulaires, sans le secours de la formule (436.), on a

$$(1,+1)^{-\frac{1}{y}}(1,+1)^{-\frac{2}{y}}\ldots.(1,+1)^{-\frac{y-1}{y}} = \frac{(2\pi)^{\frac{y-1}{2}}}{y^{\frac{1}{2}}};$$

donc la formule (462.) donne

$$463.\quad y^{-1}A = \frac{(2\pi)^{\frac{y-1}{2}}}{y^{\frac{1}{2}}}.$$

Cela étant substitué dans (461.) donne

$$(1,+1)^k(1,+1)^{k-\frac{1}{y}}(1,+1)^{k-\frac{2}{y}}\ldots.(1,+1)^{k-\frac{y-1}{y}} = (1+1)^{yk}y^{-yk}.\frac{(2\pi)^{\frac{y-1}{2}}}{y^{\frac{1}{2}}}$$

ou bien

$$464.\quad (1,+1)^{yk} = \frac{y^{yk+\frac{1}{2}}}{(2\pi)^{\frac{y-1}{2}}}(1,+1)^k(1,+1)^{k-\frac{1}{y}}(1,+1)^{k-\frac{2}{y}}\ldots.(1,+1)^{k-\frac{y-1}{y}}.$$

C'est la formule de Mr. Legendre (450.) qu'il s'agissait de démontrer.

Nous terminerons ici ce mémoire, en nous réservant pour la suite la continuation des recherches cur les facultés analytiques. On sait que ces fonctions sont très utiles dans l'analyse et il est même probable, que de nouvelles applications remarquables et importantes, par ex. à la résolution des équations algébriques, en pourront encore être faites.

Berlin au mois de Juin 1831.